الرياضيات

البحتة

الصف الثانى الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسى الأول

القسم العلمي

SAKKARA
PUBLISHING

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح **أ/ سيرافيم إلياس إسكندر**

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى **أ/ أسامة جابر عبد الحافظ**

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله
بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر
ش.م.م
SAKKARA
PUBLISHING

الطبعـــة الأولى ٢٠١٥/٢٠١٦
رقم الإيـــداع ١٠٥٥٧ / ٢٠١٥
الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 014 - 1

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

١ - ١ الدوال الحقيقية. ٤

١ - ٢ بعض خواص الدوال. ١٦

١ - ٣ اطراد الدوال. ٢٥

١ - ٤ التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية. ٣٠

١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة. ٤٨

ملخص الوحدة. ٥٧

تمارين عامة. ٥٩

اختبار تراكمي. ٦١

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

٢ - ١ الأسس الكسرية. ٦٤

٢ - ٢ الدالة الأسية وتطبيقاتها. ٧١

٢ - ٣ المعادلات الأسية ٧٧

٢ - ٤ الدالة العكسية. ٨١

٢ - ٥ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني. ٨٦

٢ - ٦ بعض خواص اللوغاريتمات. ٩٢

ملخص الوحدة. ٩٩

تمارين عامة. ١٠١

اختبار تراكمي. ١٠٣

المحتويات

الوحدة الثالثة
النهايات والاتصال

٣ - ١ مقدمة فى النهايات. ١٠٦
٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريا. ١١٣
٣ - ٣ نهاية الدالة عند اللانهاية. ١٢١
٣ - ٤ نهاية الدوال المثلثية. ١٢٧
٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة. ١٣٢
٣ - ٦ الاتصال. ١٣٧
ملخص الوحدة. ١٤٦
تمارين عامة. ١٤٨
اختبار تراكمي. ١٥٠

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات

٤ - ١ قانون قاعدة الجيب. ١٥٤
٤ - ٢ قانون قاعدة جيب التمام. ١٦٤
تمارين عامة. ١٧٥
اختبار تراكمي. ١٧٨

اختبارات وإجابات

اختبارات عامة. ١٨٠
الإجابات. ١٩١

sin⁻¹
cos⁻¹
sin
cos
ln
NO TURN ON RED

الوحدة
الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

Real Functions and Drawing Curves

مقدمة الوحدة

يعد ليوناردو أويلر *Leonhard Euler* (١٧٠٧م - ١٧٨٣م) السويسرى الأصل من أبرز علماء القرن الثامن عشر فى الرياضيات والفيزياء، فقدم وعمم الكثير من التعبيرات الرياضية ومنها مفهوم الدالة (Function) وينسب له استخدام الرمز $y=f(x)$ أو ص = د(س) للدلالة على الدالة معتبرًا أن الدالة ارتباط بين عناصر مجموعتين بعلاقة تسمح بحساب قيمة متغير تابع ص لآخر مستقل س نختاره بحرية، وبذلك عرَّف الدالة لا المنحنى مما ساهم في تحويل الهندسة إلى علاقات حسابية، كما حول جميع النسب المثلثية التى نوه بها المصريون القدماء والبابليون وبرع فيها العرب إلى دوال مثلثية. أدخل أويلر العدد الثابت $e \simeq 2.71828$ (عدد أويلر) كأساس اللوغاريتم الطبيعى، واكتشف العلاقة الرياضية $e^{i\pi}+1=0$ والتى تربط بين أهم خمسة ثوابت في الرياضيات، كما ربط بين الدوال المثلثية والدوال الأسية والأعداد المركبة. فى هذه الوحدة ستعرف صورًا مختلفة من الدوال الحقيقية وسلوكها وتمثيلها بيانيًّا مستخدمًا التحويلات الهندسية والبرامج الرسومية واستخدام الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة ، وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الدالة الحقيقية.
- يحدد مجال الدوال الحقيقية، والمجال المقابل والمدى لها.
- يتعرف فكرة مبسطة عن العمليات على الدوال الحقيقية (تركيب الدوال)
- يتعرف بعض خواص الدوال الحقيقية.
- يتعرف الدوال الزوجية والدوال الفردية ويفرق بينهما.
- يتعرف الدالة الأحادية (one – to – one).
- يستنتج اطراد الدوال الحقيقية (تزايد الدوال – تناقص الدوال – ثبوت الدوال).
- يتعرف الدوال كثيرات الحدود.
- يرسم منحنيات الدوال [الدالة التربيعية – دالة المقياس – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية ويستنتج خواص كل منها.
- يستنتج تأثير كل من التحويلات:
  د(س ± أ)± ب، أ د (س±ب) ± جـ على الدوال السابقة.
- يطبق التحويلات السابقة على رسم منحنيات الدوال الحقيقية.
- يحل معادلات على الصورة:
  |أ س + ب| = جـ، |أ س + ب| = |ى س + جا|،
  |أ س + ب| = جس + ى
- يحل متباينات على الصورة:
  |أ س + ب| < جـ ، |أ س + ب| ≤ جـ ،
  |أ س + ب| > جـ ، |أ س + ب| ≥ جـ
- يستخدم الدوال الحقيقية فى حل مشكلات رياضية وحياتية فى مجالات مختلفة.
- يربط بين ما درسه من تأثير التحويلات السابقة على الدوال المثلثية فى صورة أنشطة.
- يبحث عن التمثيل البيانى للدوال الحقيقية السابق دراستها، وتأثير التحويلات السابقة باستخدام برنامج الجيوجيبرا "geogebra".
- يستخدم الآلة الحاسبة البيانية في التمثيل البياني لبعض الدوال التى يصعب تمثيلها بالطرق العادية ثم دراسة خواص هذه الدوال.

المصطلحات الأساسية

دالة حقيقية	*Real Function*
مجال	*Domain*
مجال مقابل	*Co–domain*
مدى	*Range*
خط رأسي	*Vertical Line*
دالة متعددة التعريف	*Piecewise–Defind Function*
دالة مركبة	*Composite Function*
دالة زوجية	*Even Function*
دالة فردية	*Odd Function*
دالة أحادية	*One–to–One Function*
اطراد دالة	*Monotony of a Function*
دالة تزايدية	*Increasing Function*
دالة تناقصية	*Decreasing Function*
دالة ثابتة	*Constant Function*
دالة كثيرة الحدود	*polynomial Function*
دالة مقياس (قيمة مطلقة)	*Absolute Value Function*
دالة كسرية	*Rational Function*
خط تقارب	*Asymptote*
تحويل	*Transformation*
إزاحة (انتقال)	*Translation*
انعكاس	*Reflection*
تمدد	*Stretching*
حل بياني	*Graphical Solution*

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): الدوال الحقيقية.

الدرس (١ - ٢): بعض خواص الدوال.

الدرس (١ - ٣): اطراد الدوال.

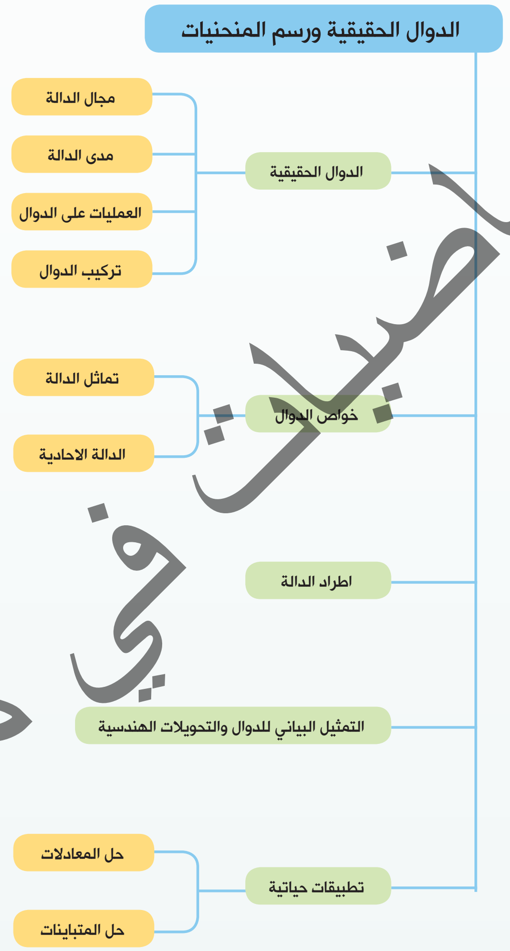
الدرس (١ - ٤): التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية.

الدرس (١ - ٥): حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة رسومية - حاسب آلى مزود ببرامج رسومية
(Graph, GeoGebra)

مخطط تنظيمى للوحدة


الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات
الدوال الحقيقية
مجال الدالة
مدى الدالة
العمليات على الدوال
تركيب الدوال
خواص الدوال
تماثل الدالة
الدالة الاحادية
اطراد الدالة
التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية
تطبيقات حياتية
حل المعادلات
حل المتباينات

١ - ١ الدوال الحقيقية

Real Functions

سوف تتعلم

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسي.
- الدالة متعددة التعريف (المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

المصطلحات الأساسية

دالة	Function
مجال	Domain
مجال مقابل	Co–domain
مدى	Range
مخطط سهمي	Arrow Diagram
مخطط بياني	Cartesian Diagram
خط رأسي	Vertical Line
دالة متعددة التعريف	Piecewise Function

الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

تذكر أن

إذا كانت د: سـ ⟵ صـ

فإن بيان د =

{ (س، ص): س ∈ سـ ، ص ∈ صـ ، ص = د(س)}

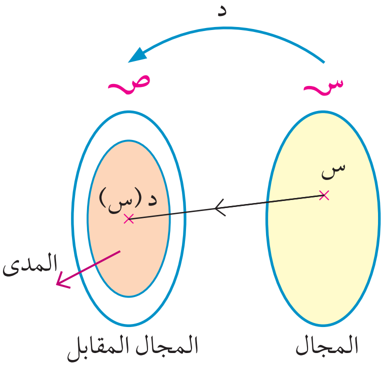
استكشف

سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث تحدد لكل عنصر من عناصر سـ عنصرًا وحيدًا من عناصر صـ

ويرمز للدالة بأحد الرموز: د أو ق أو ر أو ....

إذا رمزنا لدالة ما من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ بالرمز د فإنها تكتب رياضيًّا:

د: سـ ⟵ صـ وتقرأ د دالة من سـ إلى صـ ويلاحظ:



١- لكل عنصر س ∈ سـ يتعين عنصر وحيد ص ∈ صـ بقاعدة الدالة د وتكتب:

ص = د(س)

٢- تسمى المجموعة سـ مجال الدالة ، وتسمى المجموعة صـ المجال المقابل للدالة.

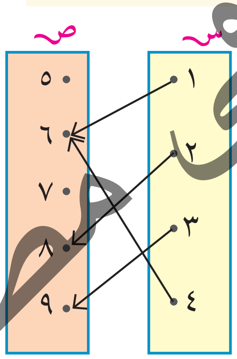
٣- تسمى المجموعة {ص = د(س): س ∈ سـ} مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.

تعريف

الدالة الحقيقية Real Function

تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

مثال



① العلاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ الممثلة في المخطط السهمي المجاور تمثل دالة، حيث:

المجموعة سـ هي مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

والمجموعة صـ المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة

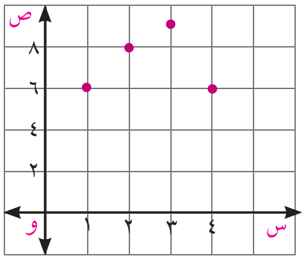
كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البياني كما في الشكل التالي حيث:

بيان الدالة = { (١، ٦)، (٢، ٨)، (٣، ٩)، (٤، ٦) }

لاحظ أن:

١- الشكل البياني للدالة هو مجموعة من النقط المنفصلة

٢- الخط الرأسى المار عند كل عنصر من عناصر مجال الدالة يقطع تمثيلها البياني فى نقطة وحيدة.



حاول أن تحل

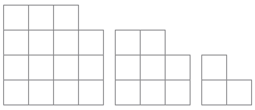
١ في النمط المقابل جميع المربعات متطابقة. إذا كان س عدد صفوف الشكل فى هذا النمط، ص مساحة الشكل بالوحدات المربعة.

أ ما قيمة ص عندما س = ٥؟

ما قيمة ص عندما س = ٩ ؟

ب اكتب العلاقة الرياضية بين عدد صفوف الشكل ومساحته فى هذا النمط.

ج هل هذه العلاقة دالة من س إلى ص ؟ فسر إجابتك.

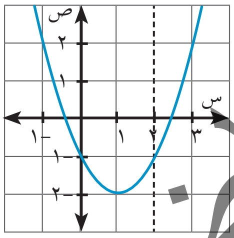


س	ص
٢	٣
٣	٨
٤	....
٥	....
....	....

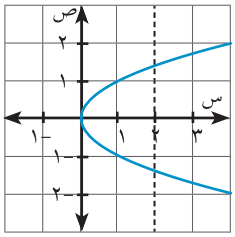
تعلم

اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة، كانت العلاقة دالة من س ← ص



دالة

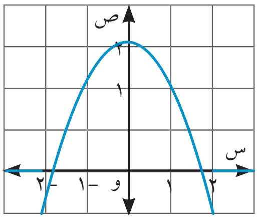


ليست دالة

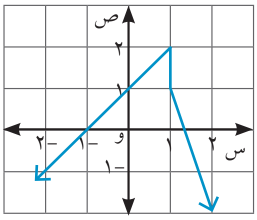
مثال

تحديد العلاقات التى تمثل دالة *Identify the Relations Representing Function*

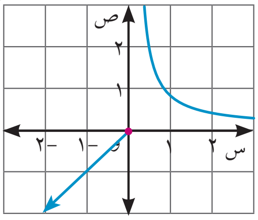
٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



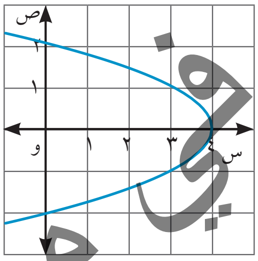
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

الحل

شكل (١) يمثل دالة

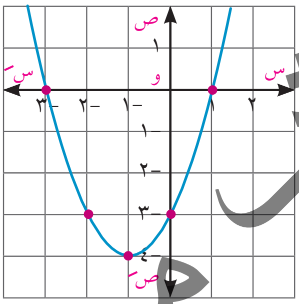
شكل (٢) لا يمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منتهٍ من النقط.

شكل (٣) يمثل دالة.

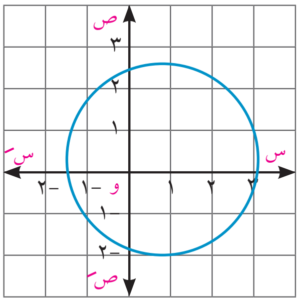
شكل (٤) لا يمثل دالة؛ لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

حاول أن تحل

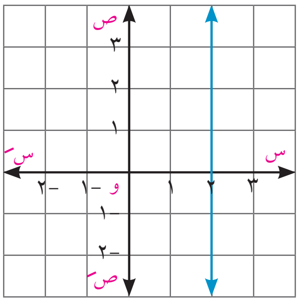
② بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من س ⟵ ص مع ذكر السبب.



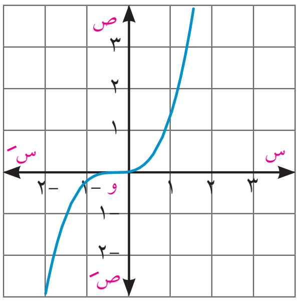
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

مثال

تحديد المجال والمدى

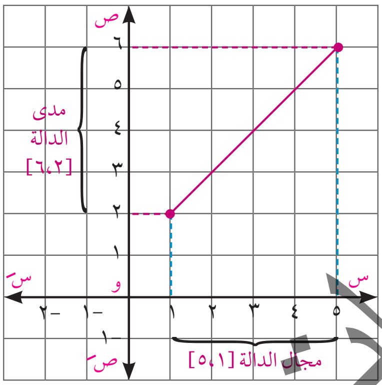
③ أ إذا كانت د: [١، ٥] ⟵ ح حيث د(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر: [١، ٥[⟵ ح حيث ر(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

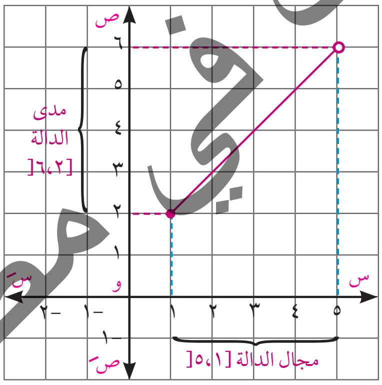
الحل



أ الدالة د دالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًّا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).

مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمي إلى منحنى الدالة.



ب الدالة ر دالة خطية مجالها [١، ٥[وواضح أن ر(س) = د(س) لكل س ∈ [١، ٥[فتمثل بيانيًّا بقطعة مستقيمة إحدى طرفيها النقطة (١، ٢) مع إستبعاد النقطة الأخرى (٥، ٦) من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عند هذه النقطة.

مدى الدالة ر= [٢، ٦[

حاول أن تحل

③ أ إذا كانت د: [١ ، ∞[⟵ ح ، حيث د(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر:]-∞، -١[⟵ ح، حيث ر(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*

عمل تعاونى

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهرى منها تبعًا لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهرى من الغاز الطبيعى فى المنازل بالقروش، احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعى بالقروش للكميات التالية:

الاستهلاك الشهرى (متر مكعب)	السعر بالقروش
حتى ٢٥	٤٠
أكثر ٢٥ حتى ٥٠	١٠٠
اكثر من ٥٠	١٥٠

١- ٣٠ متر مكعب شهريًّا.

٢- ٦٠ متر مكعب شهريًّا.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهرى]

يمكن التعبير عن الجدول السابق بالدالة د لحساب قيمة استهلاك س مترًا مكعبًا من الغاز شهريًّا حيث س∈ ع على النحو التالى:

$$د(س) = \begin{cases} ٤٠\,س & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٢٥ \\ ١٠٠\,س - ١٥٠٠ & \text{عندما } ٢٥ < س \leqslant ٥٠ \\ ١٥٠\,س - ٤٠٠٠ & \text{عندما } س > ٥٠ \end{cases}$$

وهى دالة حقيقية متعددة التعريف (معرفة بأكثر من قاعدة)

تعلم

الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

حاول أن تحل

④ تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة اجابتك فى عمل تعاونى ، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهرى من الغاز للكميات التالية:

أ ١٥ متر مكعب ب ٤٠ متر مكعب ج ٥٤ متر مكعب

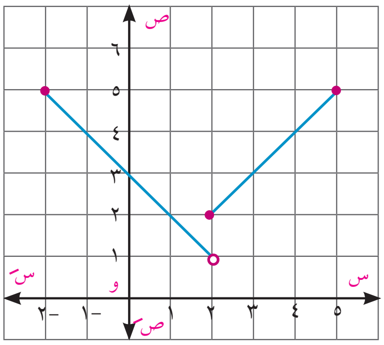
رسم الدالة متعددة التعريف:

مثال

④ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

الحل



الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: $د_{١}(س) = ٣ - س$ عندما $-٢ \leqslant س < ٢$ أى على الفترة [-٢، ٢[

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

(-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

لأن $٢ \not\in$ [-٢، ٢[كما فى الشكل المقابل.

القاعدة الثانية : $د_{٢}(س) = س$ عندما $٢ \leqslant س \leqslant ٥$ أى على الفترة [٢، ٥]

وهى لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (٢، ٢)، (٥،٥)

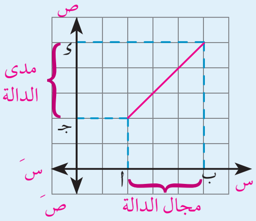
ويكون مجال الدالة د = [-٢، ٢[∪ [٢، ٥] = [-٢، ٥]

من الرسم نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-٢، ٥]

مدى الدالة د =]١، ٥]

لاحظ أن



في الشكل البياني الممثل للدالة د

مجال الدالة = [أ ، ب]

مدى الدالة = [جـ ، ى]

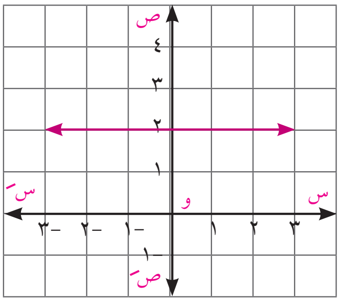
حاول أن تحل

٥ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٠ \\ س + ١ & \text{عندما } س \geqslant ٠ \end{cases}$

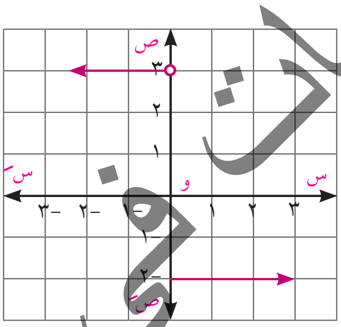
ارسم الشكل البيانى للدالة، واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

٦ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

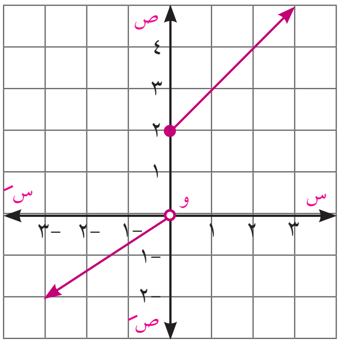
أ



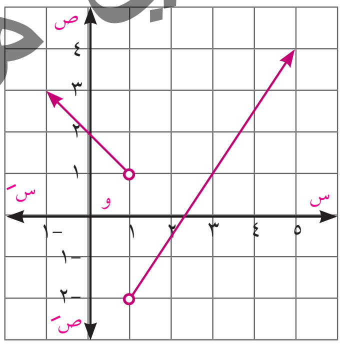
ب



جـ



د



تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

تذكر أن

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

مثال — تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ **ب** $د_٢(س) = \sqrt{س - ٣}$

ج $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ **د** $د_٤(س) = \frac{١}{\sqrt{س^٢ - ٤}}$

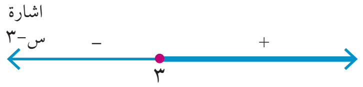
الحل

أ الدالة $د_١$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $س^٢ - ٩ = ٠$ أى $س = \pm ٣$

وعليه يكون مجال الدالة $د_١$ هو ع - {-٣، ٣}.

ب مجال الدالة $د_٢$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا ، أى قيم س التى تجعل $س - ٣ \geqslant ٠$.

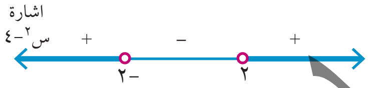
$\because$ $س - ٣ \geqslant ٠$ $\therefore$ $س \geqslant ٣$ $\therefore$ مجال $د_٢$ = [٣ ، ∞ [.



ج $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٦}$ ، دليل الجذر عدد فردى مجال $د_٣$ = ع

د تكون $د_٤$ معرفة عندما يكون $س^٢ - ٤ > ٠$.

وعليه فإن مجال $د_٤$ هو]-∞، -٢[∪]٢، ∞[= ع - [-٢، ٢]



لاحظ:

إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{ر(س)}$ حيث $ن \in ص^+$، $ن > ١$ ، ر (س) كثيرة حدود

أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $ر(س) \geqslant ٠$

حاول أن تحل

٧ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

أ $د_١(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - ٣س + ٢}$ **ب** $د_٢(س) = \sqrt{س^٢ - ١٦}$

ج $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ **د** $د_٤(س) = \frac{٥}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

تفكير ناقد:

إذا كان مجال الدالة د حيث $د(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٦س + ك}$ هو ع -{٣} أوجد قيمة ك.

تعلم

العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$، $م_٢$ على الترتيب ، فإن:

١ $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٢ $(د_١ . د_٢)(س) = د_١(س) . د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ . د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٣ $(\frac{د_١}{د_٢})(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$ مجال $(\frac{د_١}{د_٢})$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ف(د_٢)$

حيث $ف(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

نلاحظ أنه فى جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى $د_١$، $د_٢$ باستثناء القيم التى تجعل $د_٢(س) = ٠$ فى عملية القسمة.

مثال

٦ إذا كان $د(س) = س^٢ - ٤س$ ، $ر(س) = \sqrt{س+٢}$ ، $ع(س) = \sqrt{٤ - س}$

أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ $(د + ر)$ ب $(ر - ع)$

ج $(د . ع)$ د $(\frac{ع}{د})$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

أ $(ر - ع)(١)$ ب $(د . ع)(٥)$ ج $(\frac{ع}{د})(٣)$

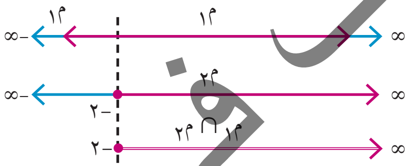
الحل

أولاً: مجال د = $م_١$ = ح ، مجال ر = $م_٢ = [-٢ ، \infty[$ ، مجال ع = $م_٣ =]-\infty ، ٤]$

أ $(د + ر)(س) = د(س) + ر(س)$

$= س^٢ - ٤س + \sqrt{س+٢}$

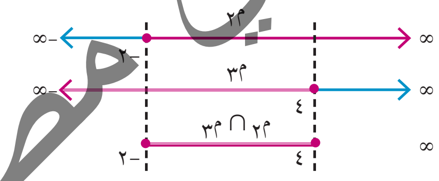
ومجال الدالة $(د + ر)$ هو ح $\cap [-٢ ، \infty[= [-٢ ، \infty[$



ب $(ر - ع)(س) = ر(س) - ع(س)$

$= \sqrt{س+٢} - \sqrt{٤ - س}$

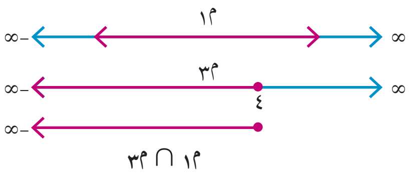
ومجال $(ر - ع)$ هو: $[-٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٤] = [-٢ ، ٤]$



ج $(د . ع)(س) = د(س) . ع(س)$

$= (س^٢ - ٤س) \sqrt{٤ - س}$

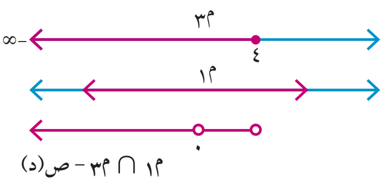
ومجال $(د . ع)$ = ح $\cap]-\infty ، ٤] =]-\infty ، ٤]$



د $\left(\frac{ع}{د}\right)(س) = \frac{ع(س)}{د(س)} = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^{٢} - ٤س}$

مجموعة أصفار الدالة د هى $\{٠ ، ٤\}$

مجال $\left(\frac{ع}{د}\right) =]-\infty ، ٤] \cap ح - \{٠ ، ٤\} =]-\infty ، ٤[- \{٠\}$



ثانيًا: القيم العددية:

أ $\because (ر - ع)(س) = \sqrt{س + ٢} - \sqrt{٤ - س}$ لكل $س \in [-٢ ، ٤]$

، $١ \in [-٢ ، ٤]$ $\therefore (ر - ع)(١) = \sqrt{٣} - \sqrt{٣} =$ صفر

ب $\because (د . ع)(س) = (س^{٢} - ٤س)\sqrt{٤ - س}$ لكل $س \in]-\infty ، ٤]$

، $٥ \notin]-\infty ، ٤]$ $\therefore (د . ع)(٥)$ غير معرفة

ج $\because \left(\frac{ع}{د}\right)(س) = \frac{\sqrt{٤ - س}}{س^{٢} - ٤س}$ لكل $س \in]-\infty ، ٤[- \{٠\}$

، $٣ \in]-\infty ، ٤[- \{٠\}$ $\therefore \left(\frac{ع}{د}\right)(٣) = \frac{\sqrt{٤ - ٣}}{٩ - ١٢} = -\frac{١}{٣}$

؟ حاول أن تحل

٨ إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث:

$د(س) = س^{٢} - ٤$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ١}$ أوجد:

أ مجال كل من الدوال الآتية: $(د + ر)$ ، $(د . ر)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$

ب أوجد القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

$(د + ر)(٥)$ ، $(د . ر)(٢)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(٣)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)(-٢)$

عمل تعاونى

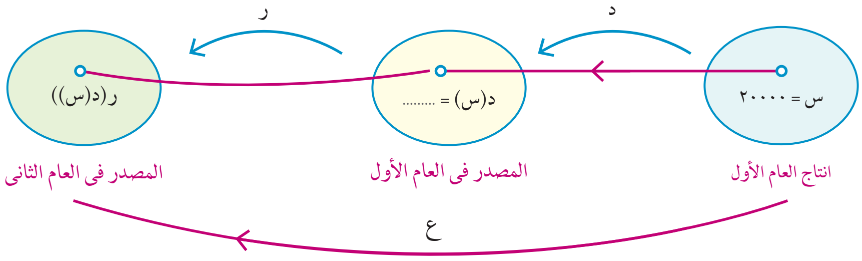
تركيب الدوال *Composition of Functions*

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة $د(س) = \frac{١}{٤}س$ حيث س عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة $ر(د) = د + ١٥٠٠$ حيث س عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى إذا كان انتاج المصنع فى العام الأول

أ ٢٠٠٠٠ وحدة
ب ٨٠٠٠٠ وحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالى:



تعلم

إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين وهى: $\boxed{ع = ر ه د}$

وتقرأ ر تركيب د، أو ر بعد د حيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

ويكون ع(س) = (ر ه د) (س)

= ر(د(س))

من المخطط السابق يكون:

أ ع (٢٠٠٠٠) = ر[د(٢٠٠٠٠)]

= ر(٥٠٠٠)

= ٥٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٦٥٠٠ وحدة

ب ع (٨٠٠٠٠) = ...

لاحظ أن

د(٢٠٠٠٠) = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠٠٠٠

= ٥٠٠٠

فكر: هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

➢ لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد (ده ر) (س) ، (ر ه د) (س) حيث د(س) = ٤س^٢ ، ر(س) = ٢س

حاول أن تحل

⑨ إذا كان د(س) = س^٢ + ٦ ، ر(س) = ٣س

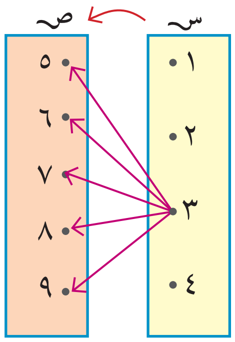
أولاً: أوجد (ده ر) (٣) ثانياً: حدد قيم س التى تجعل (ده ر) (س) = ٤٢

تمـارين ١ - ١

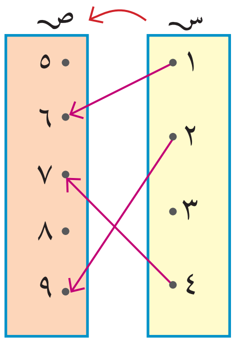
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① العلاقة المبينة بالمخططات السهمية التالية والتى تمثل دالة هى:

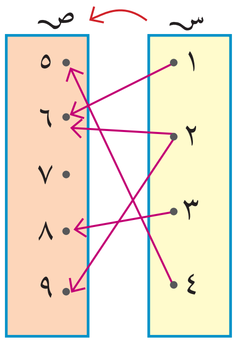
أ



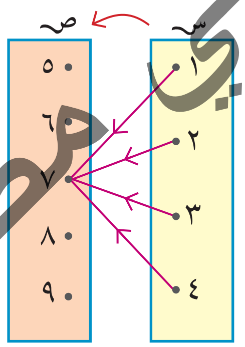
ب



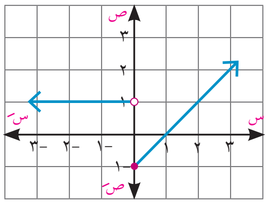
جـ



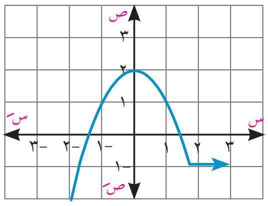
د



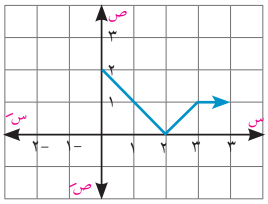
② العلاقة المبينة فى الأشكال البيانية التالية والتى لا تمثل دالة هى:



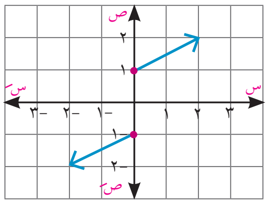
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

③ العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

أ {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}

ب {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٥)}

جـ {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}

د {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

④ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

أ ص = ٣س + ١

ب ص = س^{٢} - ٤

جـ س = ص^{٢} - ٢

د ص = حا س

أجب عن ما يأتى:

⑤ حدد مجال الدالة د حيث د(س) =

$$\begin{cases} \text{س} - ١ & \text{عندما } ٢ < \text{س} \leqslant ٤ \\ -١ & \text{عندما } -٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$$

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

⑥ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٣ & \text{عندما س} \geqslant ٢ \\ ٢\text{س} - ١ & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$$

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

⑦ إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} ٢\text{س} + ٣ & \text{عندما } -٢ \leqslant \text{س} < ٠ \\ ١ - \text{س} & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

⑧ إذا كانت د(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{عندما } -٣ \leqslant \text{س} < ٠ \\ \text{س} + ٢ & \text{عندما } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٣ \end{cases}$$

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٩ إذا كان: د(س) =
- -٤س + ٣ عندما س < ٣
- - س^{٣} عندما ٣ ≤ س ≤ ٨
- ٣س^{٢} + ١ عندما س > ٨

أوجد:

أ د(٢)　　ب د(٣)　　ج د(١٠)

١٠ الربط بالميكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر / ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

ع(ن) =
- ٨ ن عندما ٠ ≤ ن ≤ ١٠
- ٨٠ عندما ١٠ < ن < ٢٠٠
- -٤ن + ٨٨٠ عندما ٢٠٠ ≤ ن ≤ ٢٢٠

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ ع(١٠)　　ب ع(١٥٠)　　ج ع(٢١٠)

١١ الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

د(س) =
- $\frac{٥}{٢}$ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٥٠٠٠
- ٢س + ٢٥٠٠ عندما ٥٠٠٠ < س ≤ ١٥٠٠٠
- $\frac{٣}{٢}$س + ١٠٠٠٠ عندما ١٥٠٠٠ < س ≤ ٦٠٠٠٠

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ د(٥٠٠٠)　　ب د(١٠٠٠٠)　　ج د(٥٠٠٠٠)

١٢ الربط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه ح (ل) ثم أوجد:

أ ح (٣)　　ب ح($\frac{١٥}{٤}$)

١٣ الربط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م($\frac{١}{٢}$) ، م(٥).

١٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$　　ب د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

ج د(س) = $\sqrt{\text{س - ٢}}$ **د** د (س) = $\sqrt{\text{٤ - س}^{٢}}$

هـ د(س) = $\frac{\text{٣س}}{\sqrt{\text{٢س - ١}}}$ **و** د(س) = $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س + ٢}}$

١٥ إذا كان: د$_{١}$: ع $\longrightarrow$ ع حيث د$_{١}$(س) = ٣س - ١ ،

د$_{٢}$: [-٢، ٣] $\longrightarrow$ ع حيث د$_{٢}$ (س) = ٢ س + ٤

فأوجد: (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ، (د$_{١}$ - د$_{٢}$) (س) مبينًا مجال كل دالة.

١٦ إذا كان: د$_{١}$(س) = س+٢ ومجال د$_{١}$ = [-٣، ٤] ، د$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٢س ومجال د$_{٢}$ = [-١ ، ٣] ،

أوجد: (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ، (د$_{٢}$ - د$_{١}$) (س) ، ($\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}$) (س) ، ($\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{١}}$) (س) مبينًا مجال كل دالة.

١٧ إذا كان: د(س) = ٣س + ١ ، ر(س) = س^{٢} - ٥ ، ق (س) = س^{٣}

أوجد:

أ (د ∘ ر) (٢)   **ب** (ر ∘ د) (-٣)   **ج** (ر ∘ ق) (١)   **د** (ق ∘ د) (-٢)

١٨ إذا كان: د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، ر(س) = س + ٣

أوجد: (د ∘ ر) (س) ، (ر ∘ د) (س) وحدد مجال كل منهما.

١٩ إذا كان: د(س) = س^{٢} - ٣ ، ر(س) = $\sqrt{\text{س - ٢}}$

أوجد: (د ∘ ر) (س) في أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)

٢٠ تفكير إبداعى:

إذا كان ع (س) = $\sqrt{\text{س}^{٣}\text{ - ٤}}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون: ع(س) = (د ∘ ر) (س)

١ - ٢

بعض خواص الدوال

Some Properties of Functions

سوف تتعلم

- التماثل في منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

المصطلحات الأساسية

تماثل	Symmetry
دالة زوجية	Even Function
دالة فردية	Odd Function
دالة أحادية	One – to –One Function
خط أفقي	Horizontal Line

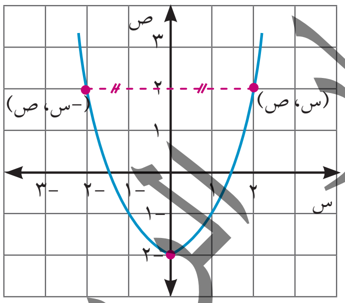
الأدوات المستخدمة

- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

قد يتميز الشكل البياني للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

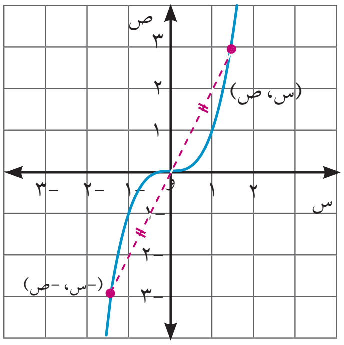
تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول محور الصادات

شكل (١)



التماثل حول نقطة الأصل.

شكل (٢)

فى شكل (١):

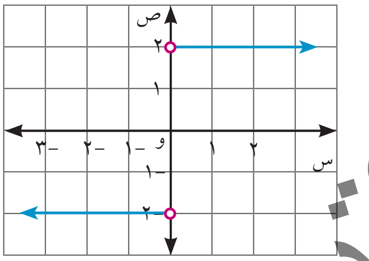
تكون النقطة (- س ، ص) الواقعة على الشكل البياني لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

فى شكل (٢):

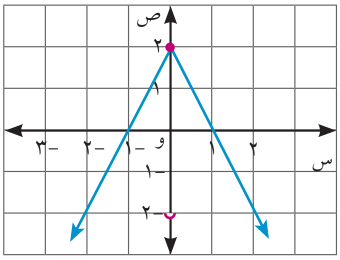
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

حاول أن تحل

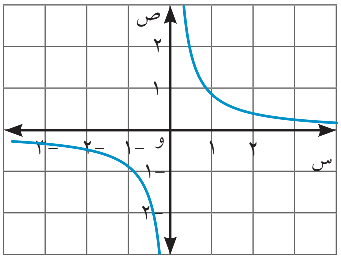
① فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



(أ)



(ب)



(جـ)

تفكير ناقد:

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*

تعلم

الدالة الزوجية: يقال للدالة د: س ← ص إنها دالة زوجية إذا كان د (- س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ س

ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

الدالة الفردية: يقال للدالة د: س ← ص إنها دالة فردية إذا كان د (- س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ س

ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

لاحظ: كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

مثال

① ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ د (س) = س^{٢} ب د(س) = س^{٣} جـ د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ د د(س) = جتا س

الحل

أ د (س) = س^{٢} ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= (-س)^{٢} = س^{٢}

أي أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

ب د(س) = س^{٣} ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = (-س)^{٣} = - س^{٣}

أي أن: د(-س)= -د(س) ∴ د دالة فردية

ملاحظة هامة:

تسمى الدالة د: ع ← ع ، د(س) = أ س^{ن} حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص$^{+}$ دالة القوى ، وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي ، فردية عندما ن دعدد فردى.

ج د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ ، مجال د = [-٣ ، ∞ [

لاحظ أن ٤ ∈ [-٣ ، ∞ [بينما -٤ ∉ [-٣ ، ∞ [

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د د(س) = حتا س ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتا س

أى أن: د(-س) = د(س) ∴ د دالة زوجية

تذكر أن

حا (-س) = - حا س

حتا (-س) = حتا س

طا (-س) = - طا س

حاول أن تحل

② ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك

أ د (س) = جا س

ب د (س) = س^{٢} + جتا س

ج د(س) = س^{٣} - جا س

د د(س) = س^{٢} جتا س

هـ د(س) = س^{٣} جا س

و د(س) = س^{٣} جتا س

ز د(س) = س^{٣} + س^{٢}

ح د(س) = جا س + جتا س

ط د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

خواص هامة:

إذا كان كل من: د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية ، وكان كل من: ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دالة فردية ، فإن:

١) د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية

٢) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣) د$_{١}$ × د$_{٢}$ دالة زوجية

٤) ر$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة زوجية.

٥) د$_{١}$ × ر$_{٢}$ دالة فردية

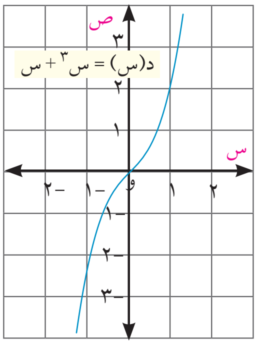
٦) د$_{١}$ + ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

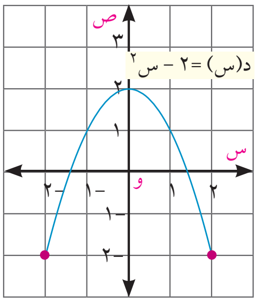
مثال

② يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًّا.

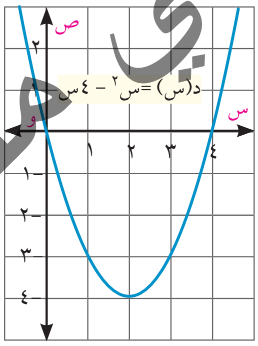
أ



ب



ج



الحل

أ د (س) = س^{٣} + س، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ع، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أى أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∋ ع ∴ د (-س) = (- س)^{٣} + (- س)

بالتبسيط: د (-س) = - س^{٣} - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا د (-س) = - (س^{٣} + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

ب د (س) = ٢ - س^{٢}، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س ∋ [-٢، ٢] ∴ د (-س) = ٢ - (-س)^{٢}

بالتبسيط د (-س) = ٢ - س^{٢}

د (-س) = د (س) أى أن الدالة زوجية

جـ د (س) = س^{٢} - ٤س ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ع ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛ أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

∵ كل س ، -س ∋ ع ∴ د (-س) = (-س)^{٢} - ٤ (-س)

بالتبسيط د (-س) = س^{٢} + ٤س ≠ د (س) ∴ د ليست زوجية

ولكن - د (س) = - س^{٢} + ٤ س

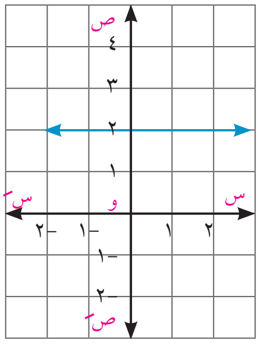
لذلك فإن د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أى أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

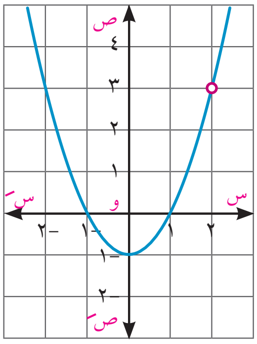
٩ حاول أن تحل

③ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

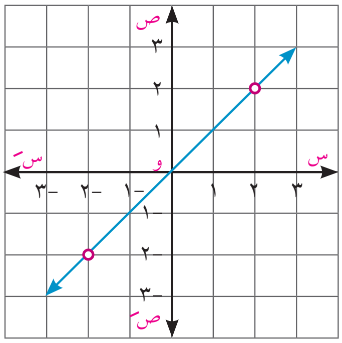
أ



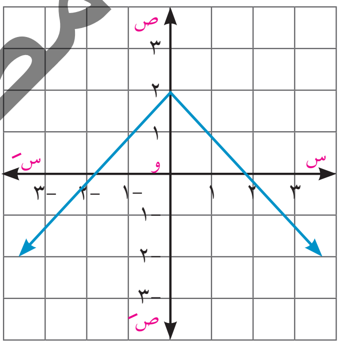
ب



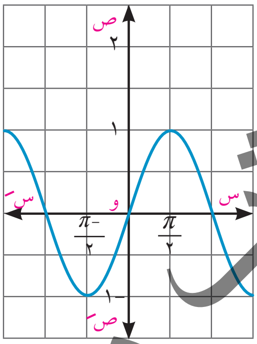
جـ



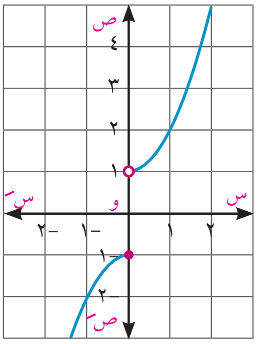
د



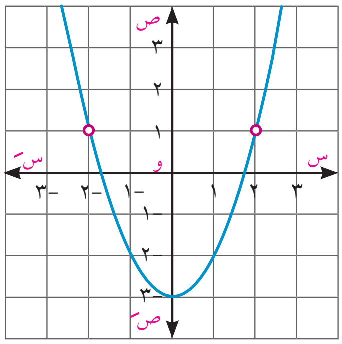
ه



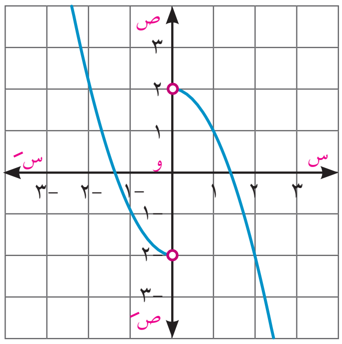
و



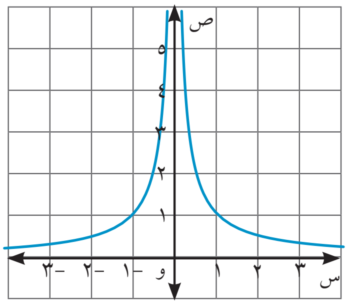
ز



ح



مثال



③ يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبريًّا.

الحل

من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية.

التحقيق الجبرى:

مجال د =]-∞ ، ٠[∪]٠، ∞[

∵ كل س ، -س ∈ مجال د ∴ $د(-س) = \begin{cases} -\frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) < ٠ \\ \frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) > ٠ \end{cases}$

بالتبسيط $د(-س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

بتبديل كتابة القاعدتين $د(-س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أى أن د (-س) = د (س) فالدالة زوجية.

حاول أن تحل

④ مثِّل الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} س + ٢ & \text{حيث } س \geqslant -٢ \\ -س - ٢ & \text{حيث } س < -٢ \end{cases}$ بيانيًّا.

ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبريًّا.

الدالة الأحادية: *One - to - One Function (Injective Function)*

تعريف ١

الدالة د: س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

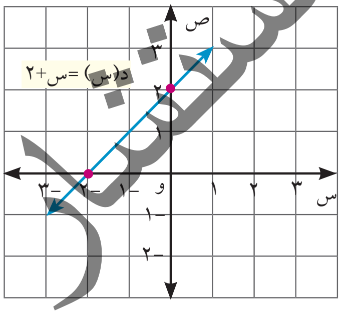
لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن أ = ب

أو لكل أ ≠ ب فإن د (أ) ≠ د (ب)

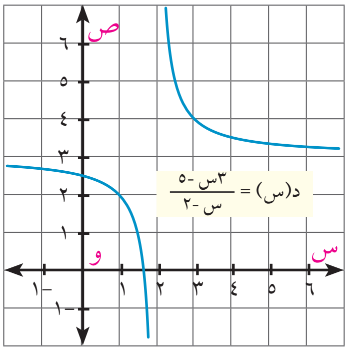
مثال

④ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د: س ← ص ، أثبت أن د دالة أحادية.

أ



ب



الحل

أ د(س) = س + ٢ ، مجال د = ع

لكل أ ، ب ∈ ع فإن د (أ) = أ + ٢ ، د (ب) = ب + ٢

بوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ + ٢ = ب + ٢

وبحذف ٢ من الطرفين ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية

ب د (س) = $\frac{٣س-٥}{س-٢}$ ، مجال د= ع - {٢}

لكل أ ، ب ∈ ع - {٢} فإن د(أ) = $\frac{٣أ-٥}{أ-٢}$ ، د(ب) = $\frac{٣ب-٥}{ب-٢}$

بوضع د (أ) = د (ب) ∴ $\frac{٣أ-٥}{أ-٢}$ = $\frac{٣ب-٥}{ب-٢}$

بالضرب التبادلى ٣أب - ٦أ - ٥ب + ١٠ = ٣أب - ٦ب - ٥أ + ١٠

بالحذف والتبسيط ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية.

تعلم

إختبار الخط الأفقى *Horizontal – Line Test*

تكون الدالة د: س ← ص دالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

حاول أن تحل

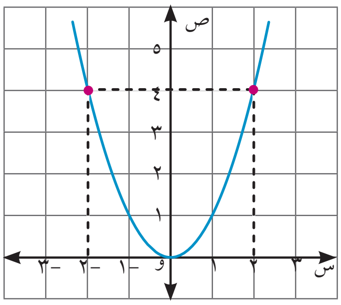
⑤ فى بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التى تمثل دالة إحادية.

⑥ أثبت أن د: س ← ص دالة إحادية حيث:

أ د (س) = ٢س - ٣   ب ر (س) = $\frac{٣ س - ٥}{٤ س + ٣}$

مثال

⑤ بيِّن أن الدالة د:س ← ص حيث د (س) = س^{٢} ليست دالة أحادية.



الحل

د (٢) = ٤ ، د (-٢) = ٤   ∴ د (-٢) = د (٢) = ٤

∵ -٢ ≠ ٢   ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.

حاول أن تحل

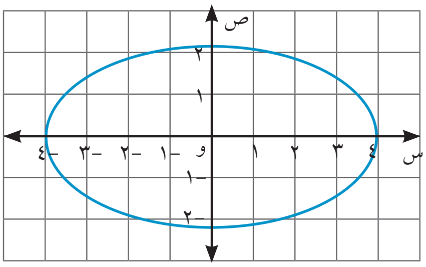
⑦ بين أن د:س ← ص ليست دالة أحادية

أ د (س) = س^{٢} - ١   ب ر (س) = س^{٢} - ٥س + ٦

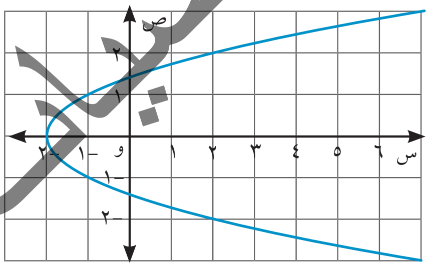
تفكير ناقد: إذا كانت د زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟ فسر ذلك؟

تمارين ١ - ٢

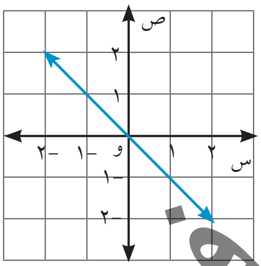
① اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



شكل (١)

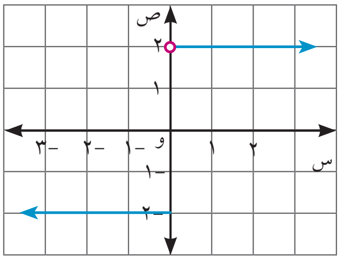


شكل (٢)

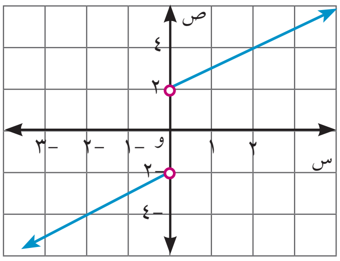


شكل (٣)

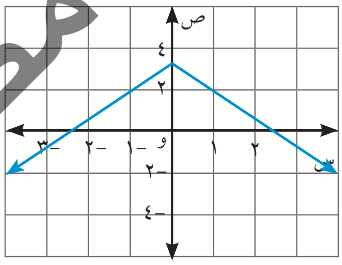
② أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



شكل (١)

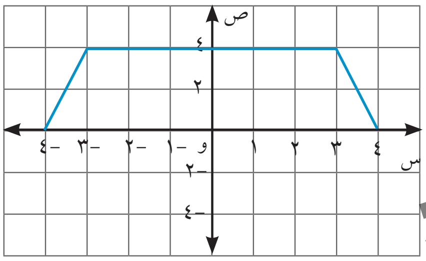


شكل (٢)

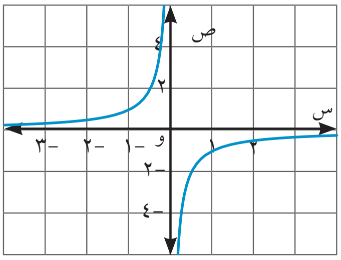


شكل (٣)

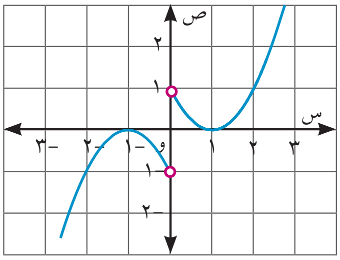
مكتبة مستشار الرياضيات في مصر



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

③ ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١

ب د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣}

ج د (س) = س^{٣} - $\frac{١}{\text{س}}$

د د(س) = س^{٢} - ٣س

هـ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٢}{\text{س} - ٣}$

و د(س) = س حتا س

ز د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦}$

ح د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}$

ط د (س) = (س^{٢}+١)^{٣}

④ إذا كانت د$_{١}$، د$_{٢}$، د$_{٣}$ دوال حقيقية حيث د$_{١}$(س) = س^{٥}، د$_{٢}$(س) = حاس، د$_{٣}$(س) = ٥س^{٢}،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

أ د$_{١}$+ د$_{٢}$

ب د$_{١}$+ د$_{٣}$

ج د$_{١}$× د$_{٢}$

د د$_{٣}$× د$_{٢}$

⑤ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)^{٢} ، ر(س) = (٣ + س)^{٢}

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

أ د + ر

ب د - ر

ج د . ر

د $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$

⑥ ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كما يلى، ثم بين أى منها زوجية وأى منها فردية وأيها غير ذلك، وتحقق من ذلك جبريًّا.

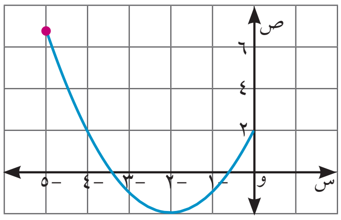
أ $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢ & \text{عندما س} > ٠ \\ -٢ & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

ب $\text{د (س)} = \begin{cases} -\text{س} & \text{عندما س} \geqslant ٠ \\ \text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

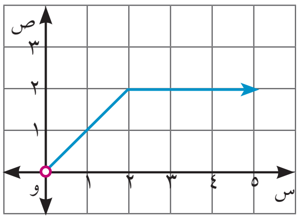
ج $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{عندما س} \geqslant ٠ \\ ٧\text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

د $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{عندما س} \geqslant ٠ \\ ١ - \text{س} & \text{عندما س} < ٠ \end{cases}$

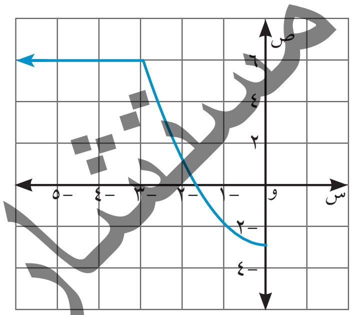
٧ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



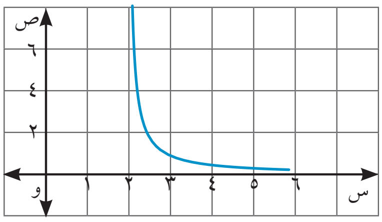
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٨ في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب.

أ د(س) = ٣ س + ١

ب د (س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$

ج د(س) = س^{٣} + ١

د د (س) = ٢س^{٢} - س - ٣

ه د(س) = س^{٤} + ٢س^{٢} + ١

٩ الربط بالصناعة: يعمل سعيد في مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالاضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًّا.

أ اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًّا.

ب هل الدالة د أحادية؟ فسر إجابتك.

١٠ تفكير ابداعى: مثِّل بيانيًّا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ يمر بالنقط (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) و يمثل دالة زوجية.

ب يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (-٢ ، ١) ، (-٣ ، ٥) و يمثل دالة فردية.

١ - ٣ اطراد الدوال

Monotonicity of Functions

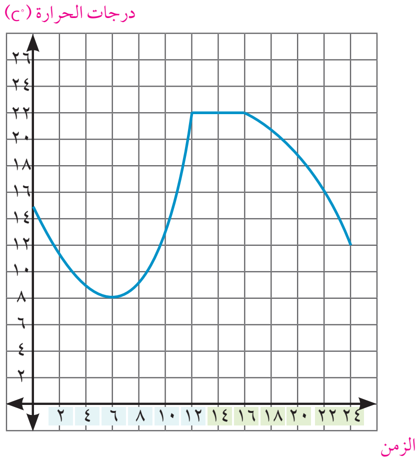
فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة.

جـ فترات ثبات درجات الحرارة.



تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

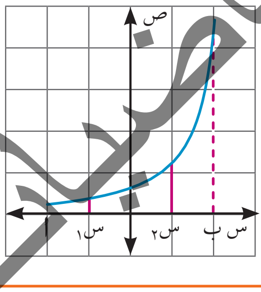
تعلم

تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة $]أ ، ب[$

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2 \in]أ ، ب[$ حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) > د(س_1)$

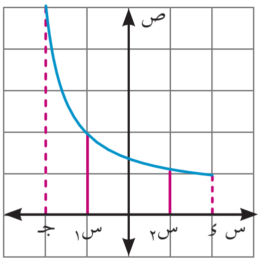


تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة $]جـ ، ى[$

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2 \in]جـ ، ى[$ حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) < د(س_1)$

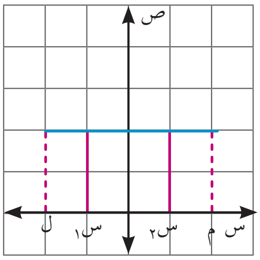


ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة $]ل ، م[$

إذا كان لكل $س_1$، $س_2 \in]ل ، م[$ حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) = د(س_1)$



سوف تتعلم

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (*Geogebra*) في رسم منحنى دالة

المصطلحات الأساسية

- اطراد. *Monotony*
- دالة تزايدية. *Increasing Function*
- دالة تناقصية. *Decreasing Function*
- دالة ثابتة. *Constant Function*

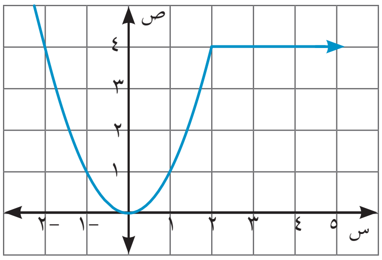
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

مثال

① ابحث اطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.



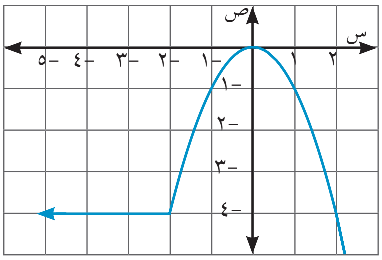
الحل

- الدالة تناقصية فى الفترة]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة]٢،∞ [

حاول أن تحل

① فى الشكل المقابل:

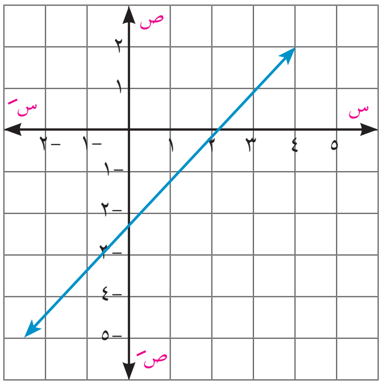
ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.



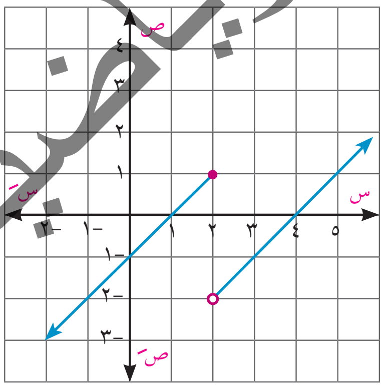
مثال

② يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س~ ⟵ ص~ ، حيث ص = د(س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

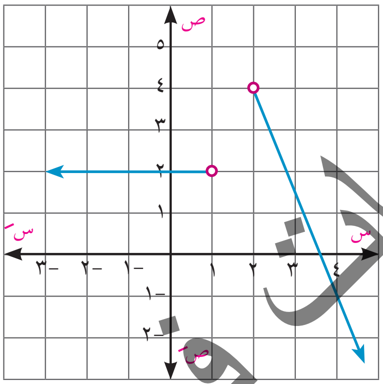
أ



ب



ج



الحل

أ مجال د = ع =]-∞، ∞[، مدى د =]-∞، ∞[الدالة تزايدية فى]-∞ ، ∞[

ب مجال د =]-∞ ، ٢[∪]٢، ∞[=]-∞، ∞[

الدالة تزايدية فى]-∞، ٢[، تزايدية أيضًا فى]٢ ، ∞[

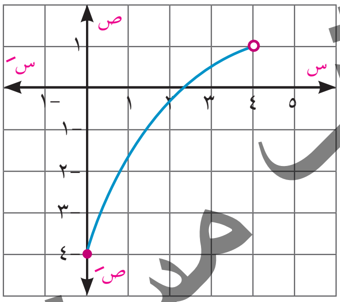
ج مجال د=]-∞ ، ١[∪]٢، ∞[، مدى د =]-∞ ، ٤[

الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١[، وتناقصية فى]٢ ، ∞[

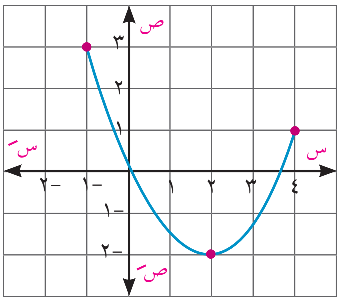
حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

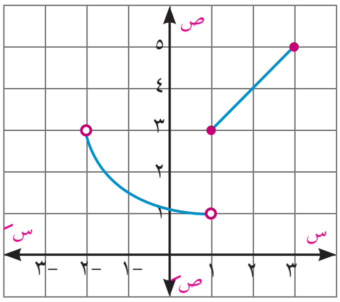
أ



ب



ج



تفكير ناقد: أى من الأشكال السابقة يمثل دالة إحادية ؟ فسر إجابتك

استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانيًا ، ومن أشهرها برنامج *GeoGebra* المجانى للتابلت أو الحاسوب.

نشاط

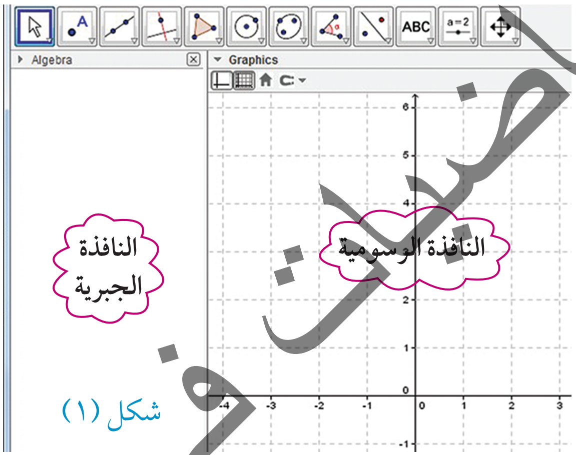
استخدم برنامج جيوجبرا في عمل التحويلات الهندسية للدوال

باستخدام برنامج *GeoGebra* مثل بيانيًا الدالة د حيث: د(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٢ ، ومن الرسم:

أ أوجد مجال ومدى الدالة.

ب ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

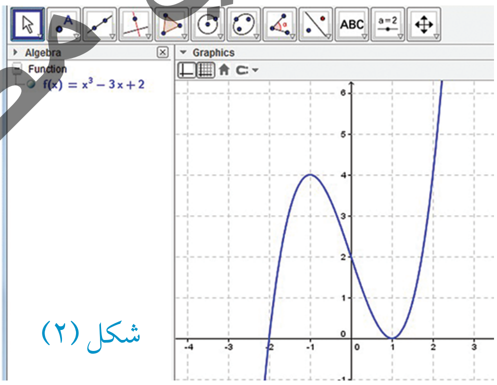
لتمثيل الدالة بيانيًا اتبع الخطوات التالية:


ABC
a=2
Algebra
Graphics
النافذة الجبرية
النافذة الرسومية
6
5
4
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

شكل (١)

١- افتح نافذة الجبر والرسم البيانى من برنامج (*GeoGebra*)

ثم إضغط *Graphics* واختر ▦ لتصل إلى النافذة المبينة فى شكل (١).


ABC
a=2
Algebra
Graphics
6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

Function

f(x) = x³ − 3x + 2

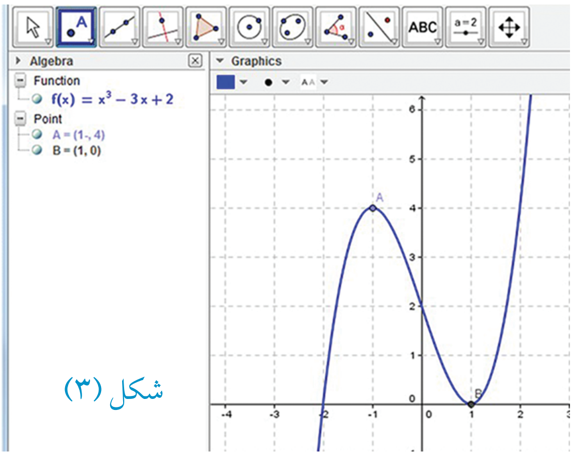
شكل (٢)

٢- فى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة د(س) = $س^{٣}$ - ٣س + ٢ بمربع الادخال (input) على النحو التالى:

إبدأ ← χ ^ 3 – 3 χ + 2

ثم اضغط ↵ فيظهر فى النافذة البيانية منحنى الدالة، وفى النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما فى شكل (٢)

٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى فى النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيى النقطة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٣).



$f(x) = x^3 - 3x + 2$

A = (1-, 4)

B = (1, 0)

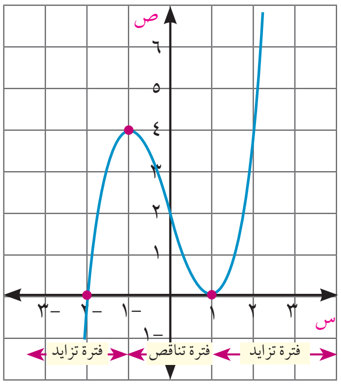
شكل (٣)

من الشكل البيانى للدالة نجد:

أ مجال د =]-∞، ∞[، مدى د=]-∞، ∞[

ب الدالة تزايدية فى]-∞ ، -١[، تناقصية فى]-١ ، ١[، تزايدية فى]١ ، ∞[

كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.



لاحظ:

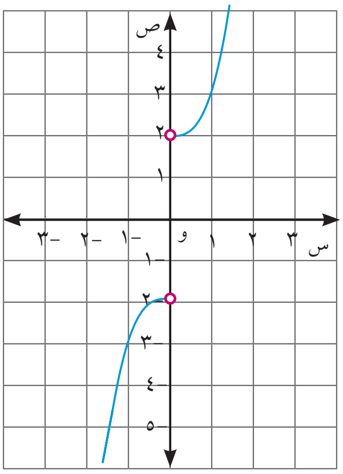
النقطة (٠، ٢) هى نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

تدريب على النشاط

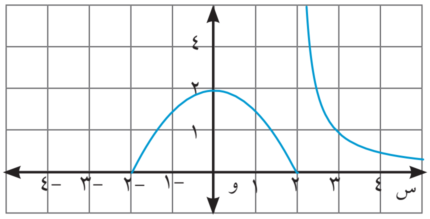
باستخدام برنامج *Geogebra* ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣س - $س^٣$ ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك.

تمـارين ١ – ٣

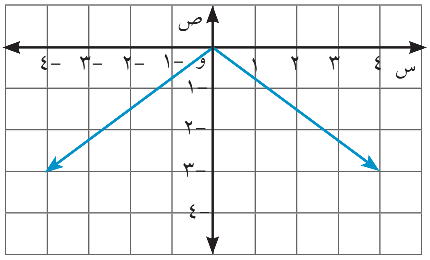
١ الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:



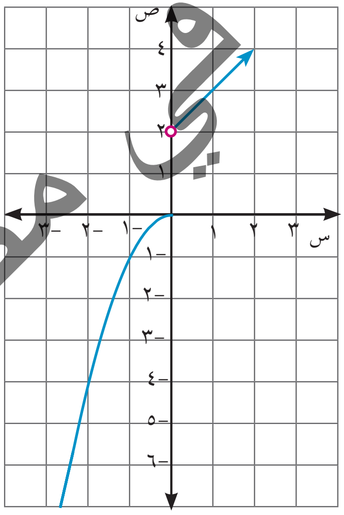
شكل (١)



شكل (٢)



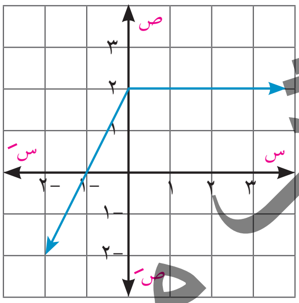
شكل (٣)



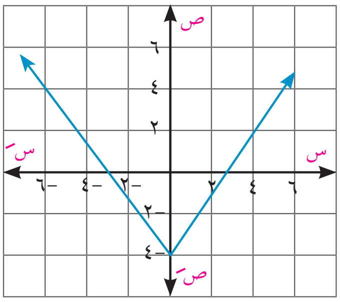
شكل (٤)

② حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

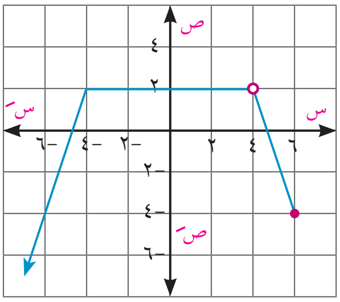
أ



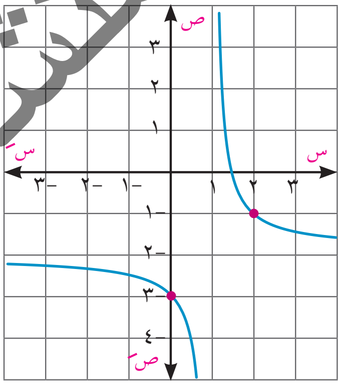
ب



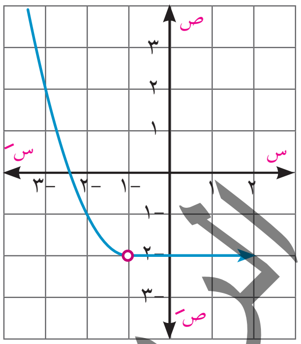
جـ



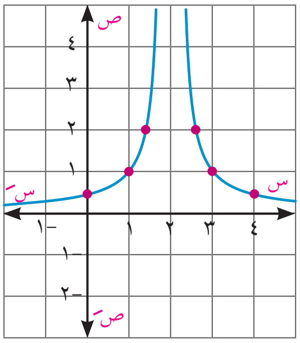
د



هـ



و



③ اذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

د(س) = { ٤ - س عندما س < ١
        { س عندما ١ ≤ س ≤ ٦

أ ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

④ **تفكير ابداعي**

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

⑤ باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من ما يأتى ، ومن الرسم استنتج اطراد الدالة ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = س^{٢} - ٥

ب د(س) = ٤ - س^{٢}

جـ د(س) = (س - ١)^{٢} + ١

د د(س) = س^{٣}

هـ د(س) = س^{٣} - ٣س

و د(س) = $\frac{-١}{س - ٢}$

١ - ٤ التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

Graphical Representation of functions, Geometriaal Transformations

الدالة كثيرة الحدود Polynomial Functions

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

$$\text{د(س)} = \text{أ}_{٠} + \text{أ}_{١}\text{س} + \text{أ}_{٢}\text{س}^{٢} + \text{أ}_{٣}\text{س}^{٣} + \dots\dots + \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}$$

حيث: $\text{أ}_{٠}$ ، $\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، $\text{أ}_{٣}$ ،...... ، $\text{أ}_{\text{ن}} \in \text{ع}$ ، $\text{أ}_{\text{ن}} \neq ٠$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، ولذلك تسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

لاحظ:

١- إذا كان د(س) = $\text{أ}_{٠}$ ، $\text{أ}_{٠} \neq ٠$ فإن د تسمى دالة كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالًّا خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالًّا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالًّا تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود د، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

مثال

① إذا كان د ، ر كثيرتا حدود حيث د(س) = $(\text{أ س} + ٥)^{٢}$،
ر(س) = ٩$\text{س}^{٢}$ + ٣٠ س + جـ - ٤ ، وكان د(س) = ر(س) أوجد قيمتى ا ، جـ.

الحل.

د(س) = $(\text{أ س} + ٥)^{٢} = \text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢} + ١٠\text{أ س} + ٢٥$

∵ د(س) = ر(س) ∴ معاملات قوى س المتناظرة متساوية

بمقارنة معامل س : ١٠أ = ٣٠ ∴ أ = ٣

بمقارنة الحد المطلق: جـ - ٤ = ٢٥ ∴ جـ = ٢٩

حاول أن تحل

① إذا كان د(س) = (أ + ٢ ب) $\text{س}^{٣}$ - جـ س + ٤ ، ر(س) = ٧$\text{س}^{٣}$ + ٥س + (أ - ب)
أوجد قيم أ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س)

سوف تتعلم

- دوال كثيرة الحدود (الدالة الخطية – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية)
- دالة المقياس (القيمة المطلقة)
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات

ص = د(س) + أ

ص = د(س + أ)

ص = د(س + أ) + ب

ص = – د(س)

ص = أ د (س)

ص = أ د(س +ب) + جـ

- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

المصطلحات الأساسية

تحويل.	Transformation
انتقال.	Translation
انعكاس.	Reflection
رأسى	Vertical
أفقى	Horizontal
خط تقارب	Asymptutes

الأدوات المستخدمة

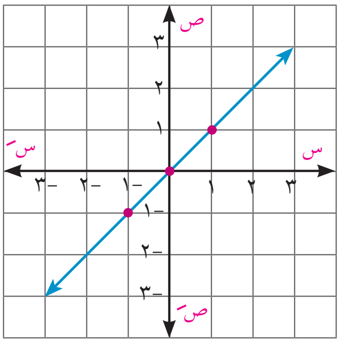
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

أولًا: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*

تعلم

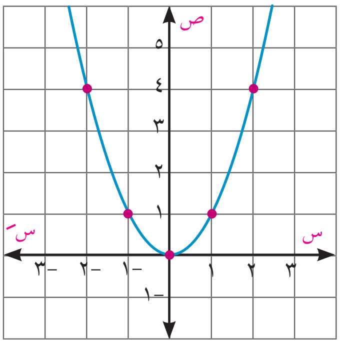
فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:



١) د(س) = س

الدالة د تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

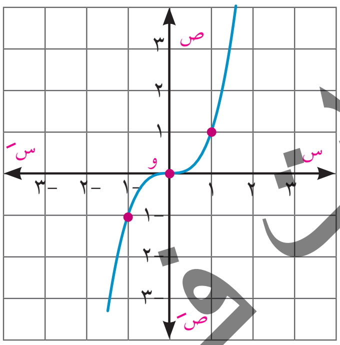
(تحقق من: مدى د = ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)



٢) د(س) = $س^٢$

الدالة د تربط العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠،∞[)



٣) د(س) = $س^٣$

الدالة د تربط العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠، ٠)

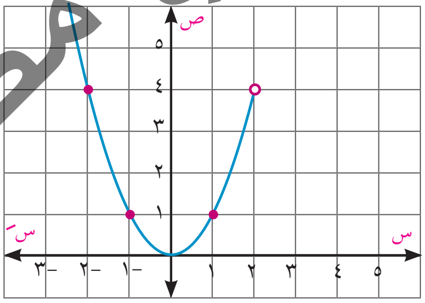
(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع)

مثال

② ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

الحل



شكل (١)

١) عندما س < ٢ ، د(س) = $س^٢$

نرسم د(س) = $س^٢$ لكل س]-∞ ، ٢[

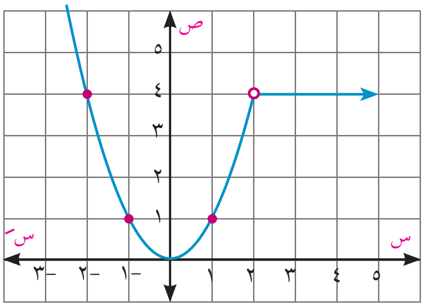
مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما فى شكل (١)

٢) عندما س > ٢ ؛ د(س) = ٤

ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س]٢،∞ [

على نفس الشكل البيانى كما فى شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة د = ع - {٢} ، ومدى د = [٠ ، ∞[



شكل (٢)

؟ حاول أن تحل

② ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د (س) = { س^{٢} عندما س < ٠ ، س عندما س ≥ ٠ } ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

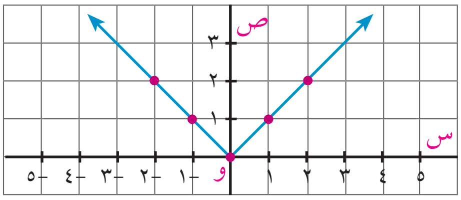
تعلم

دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|،س ∈ ع

وتعرف كما يلي:

د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، - س عندما س < ٠ }



لاحظ أن: |- ٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠، $\sqrt{}$(-٢)^{٢} = $\sqrt{}$ ٢^{٢} = ٢

أى أن: |س|≥٠ ، |-س | = |س| ، $\sqrt{}$ س^{٢} = |س|

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

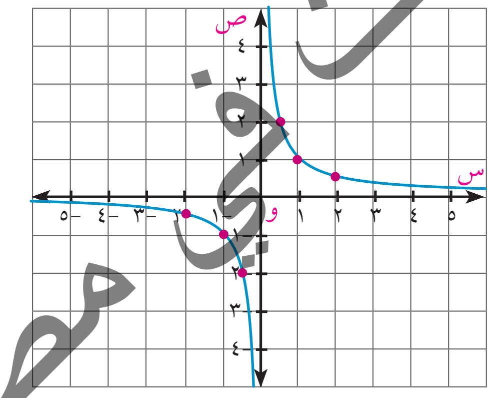
(تحقق من: مدى د = [٠ ، ∞[، د زوجية ، د تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠،∞ [ )

تعلم

الدالة الكسرية *Rational Function*

أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ ع - {٠}



الدالة د تربط العدد بمعكوسه الضربى ، و يمثلها منحنى نقطة تماثله (٠، ٠) ويتكون من جزأين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخر يقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)

(تحقق من: مدى د = ع ، د فردية ، د تناقصية فى]-∞، ٠[، وتناقصية أيضًا فى]٠،∞ [)

؟ حاول أن تحل

③ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، $\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ }

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

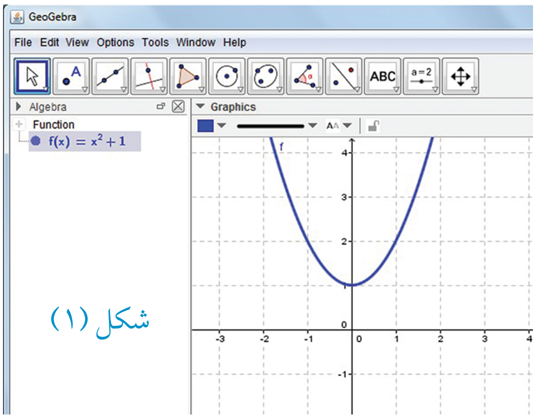
أولًا: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*

عمل تعاونى

اعمل مع زميل

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} باستخدام برنامج **Geogebra**

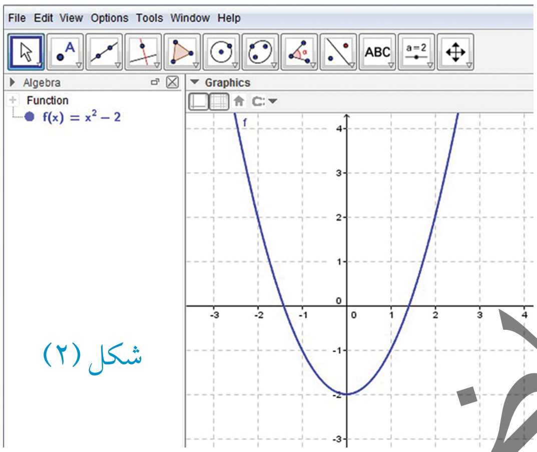
٢) ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًّا لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} + ١ كما فى شكل (١).


GeoGebra
File Edit View Options Tools Window Help
ABC
a=2
Algebra
Graphics
Function
f(x) = x² + 1
f
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

شكل (١)

٣) اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.

٤) اسحب منحنى د(س) = س^{٢} وحدتين رأسيًّا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س^{٢} - ٢ كما فى شكل (٢)


File Edit View Options Tools Window Help
ABC
a=2
Algebra
Graphics
Function
f(x) = x² − 2
f
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

شكل (٢)

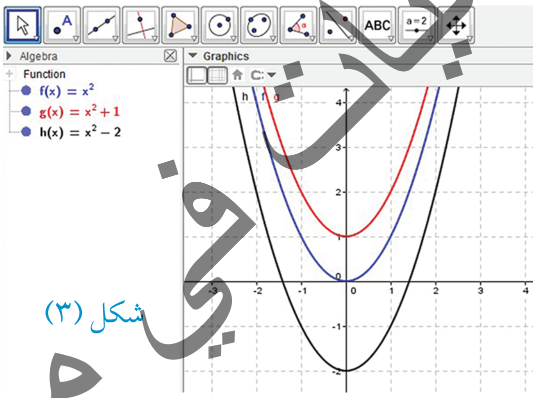
فكر: بين كيف يمكن رسم د(س) = س^{٢} - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س^{٢}؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س^{٢} + ١ ، ق (س) = س^{٢} - ٢ فإن:

١) منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

٢) منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.


ABC
a=2
Algebra
Graphics
Function
f(x) = x²
g(x) = x² + 1
h(x) = x² − 2
h
f
g
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

شكل (٣)

تفكير ناقد: باستخدام منحنى د(س) = س^{٣} بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ ر(س) = س^{٣} + ٤

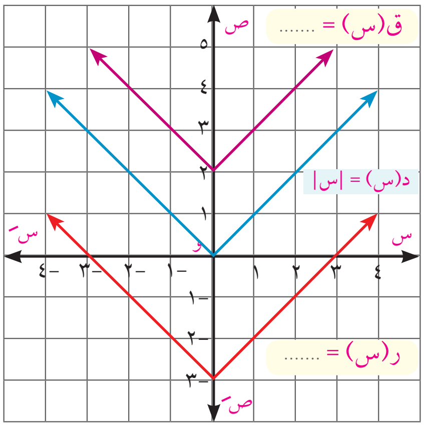
ب ق(س) = س^{٣} - ٥

تعلم

رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$ ، عندما أ > ٠ ، و فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ عندما أ < ٠ .

مثال



٣ يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر، ق حيث د(س) = |س|

الحل

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

، ∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

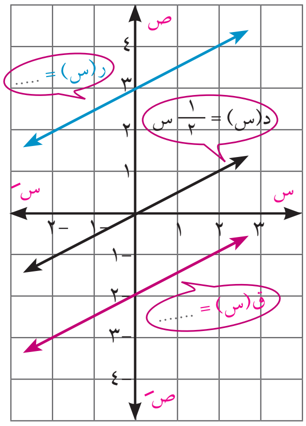
∴ ق(س) = د(س) + ٢

∵ د(س) = |س| ∴ ق(س) = |س| + ٢

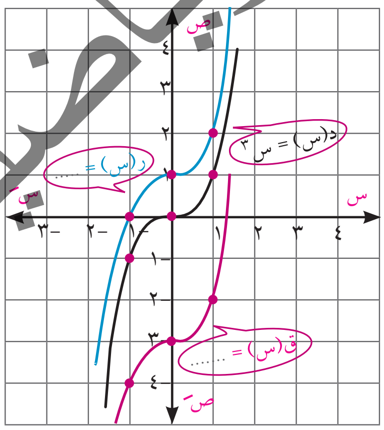
حاول أن تحل

٤ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية، اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل.

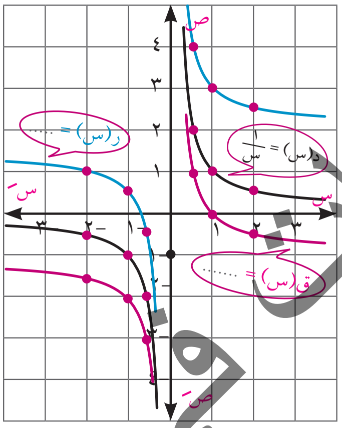
أ



ب



ج

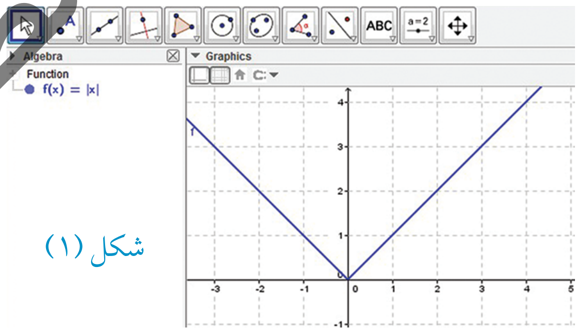


ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

عمل تعاوني

اعمل مع زميل:

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا برنامج *Geogebra* بكتابة قاعدة الدالة في مربع الإدخال على النحو التالي: abs(x) ثم اضغط إدخال فيظهر منحنى الدالة في النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x| في النافذة الجبرية كما في شكل (١)

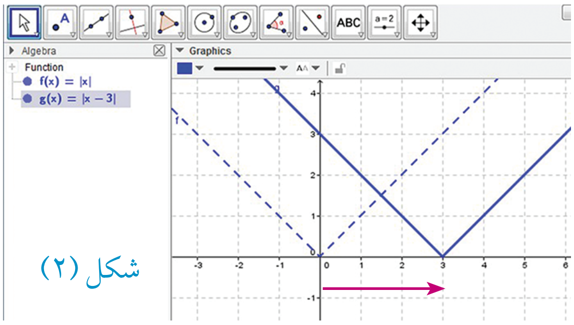


Function
f(x) = |x|

شكل (١)

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

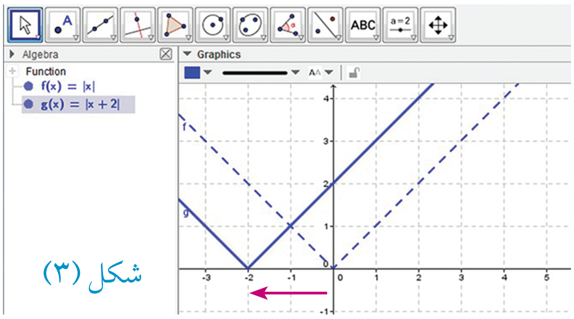
٢) اسحب منحنى الدالة أفقيًا فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٢)



Function
f(x) = |x|
g(x) = |x − 3|

شكل (٢)

٣) اسحب منحنى الدالة أيضًا فى الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما فى شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟



Function
f(x) = |x|
g(x) = |x + 2|

شكل (٣)

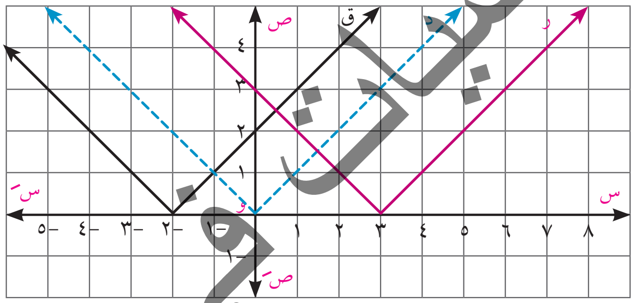
فكر: بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥| ، ق(س) = |س + ٤|.

تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + أ)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما يكون أ > ٠، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$ عندما يكون أ < ٠.

لاحظ: فى الشكل المقابل: د(س) = |س|:



١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

٢) منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$

∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدء الشعاعين (-٢ ، ٠)

مثال

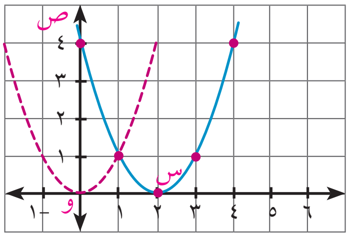
④ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = (س - ٢)^٢

ب ع (س) = (س + ٣)^٢

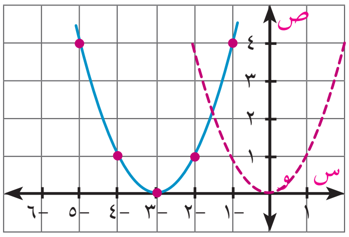
الحل

أ



➤ منحنى ر (س) = (س - ٢)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هي (٢،٠).

ب



➤ منحنى ع (س) = (س + ٣)^{٢} هو منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة ٣ وحدات فى الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

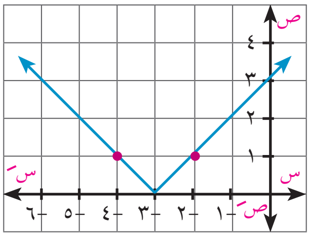
٩ حاول أن تحل

⑤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

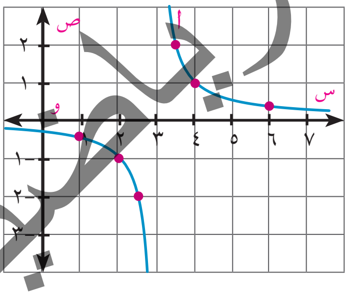
أ ر(س) = (س + ٤)^{٢} **ب** ع (س) = (س – ٣)^{٢}

⑥ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًّا بالأشكال التالية:

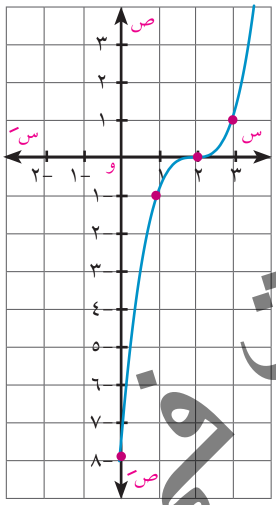
أ



ب



جـ



تفكير ناقد: إذا كان د(س) = س^{٢} ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = (س - ٣)^{٢} + ٢

رسم المنحنى ص = د(س + أ) + ب

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + أ) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات (في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما أ > ٠ ، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و سَ}}$ عندما أ < ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه $\overleftarrow{\text{و صَ}}$ عندما ب < ٠)

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

حاول أن تحل

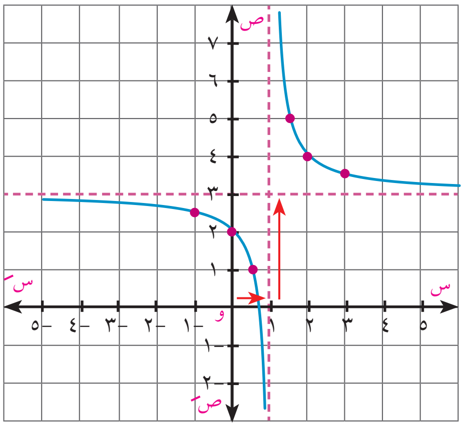
٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = $(س + ٢)^٢ – ٤$

ب ع (س) = $(٣ - س)^٢ – ١$

مثال

٥ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها:



الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$

بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ (أ = -١ < ٠) ، ثم

إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هى النقطة (١، ٣) ، مدى ر = ح - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية فى] - ∞، ١[، وتناقصيه أيضًا فى] ١، ∞ [

تفكير ناقد: هل يمكن القول بأن د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

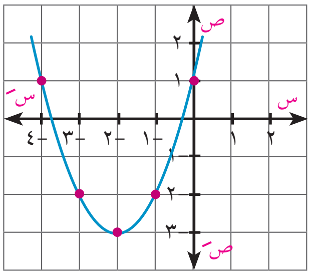
٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س≠٠ لتمثيل كل من:

أ ر(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ + ١

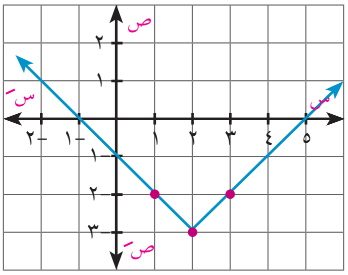
ب ق (س) = $\frac{٢س - ٣}{س - ٢}$

٩ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :

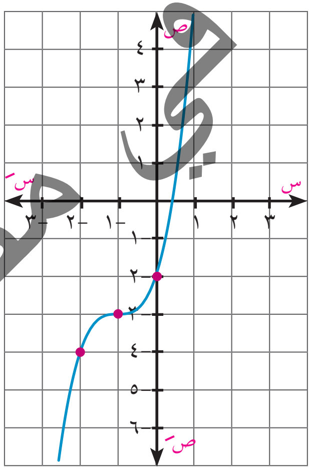
أ



ب



جـ

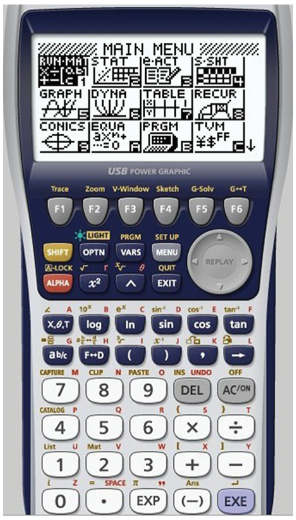


نشاط

استخدام الحاسبة البيانية فى رسم الدوال

لاستخدام الحاسبة البيانية فى رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} + ٤س + ١

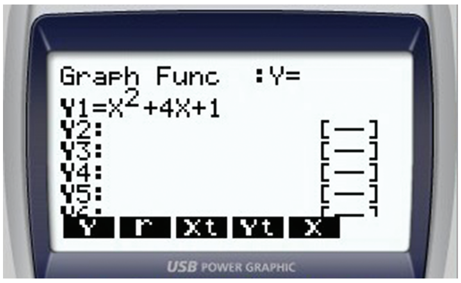
اتبع الخطوات التالية:


MAIN MENU
RUN·MAT
STAT
e·ACT
S·SHT
GRAPH
DYNA
TABLE
RECUR
CONICS
EQUA
PRGM
TVM
USB POWER GRAPHIC
Trace
Zoom
V-Window
Sketch
G-Solv
G↔T
F1
F2
F3
F4
F5
F6
SHIFT
OPTN
VARS
MENU
ALPHA
EXIT
REPLAY
EXE

١) افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة و إختر *GRAPH*، اضغط EXE والذى يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة.

٢) اكتب عند Y١ فى نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح *T, θ, X* لكتابة المتغير x ولذلك اضغط المفاتيح التالية:

إبدأ ← *T, θ, X* x^2 + 4 *T, θ, X* + 1

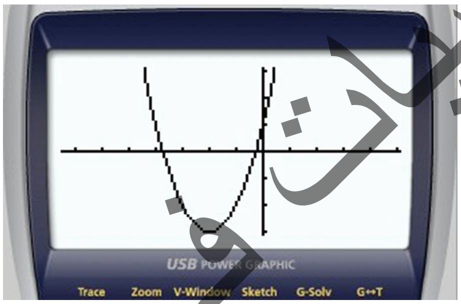


```
Graph Func   :Y=
Y1=X²+4X+1
Y2:              [—]
Y3:              [—]
Y4:              [—]
Y5:              [—]
 Y   r   Xt  Yt  X
```

USB POWER GRAPHIC

٣) لرسم الدالة اضغط EXE ◯ EXE ← إبدأ

فتظهر النافذة الرسومية كما فى الشكل المقابل.


USB POWER GRAPHIC
Trace
Zoom
V-Window
Sketch
G-Solv
G↔T

٤) استخدم مفتاح ◯ في النافذة الرسومية لدراسة الدالة.

لاحظ أن:

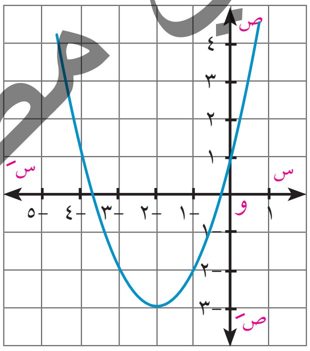
د(س) = س^{٢} + ٤س + ١ بإكمال المربع

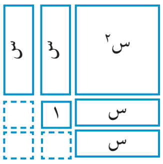
= (س^{٢} + ٤س + ٤) - ٣

= (س + ٢)^{٢} - ٣

أى أن منحنى الدالة د (المعطاه) هو نفس منحنى الدالة ر حيث

حيث ر(س) = س^{٢} بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، ثم ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ويمثله الرسم المقابل.

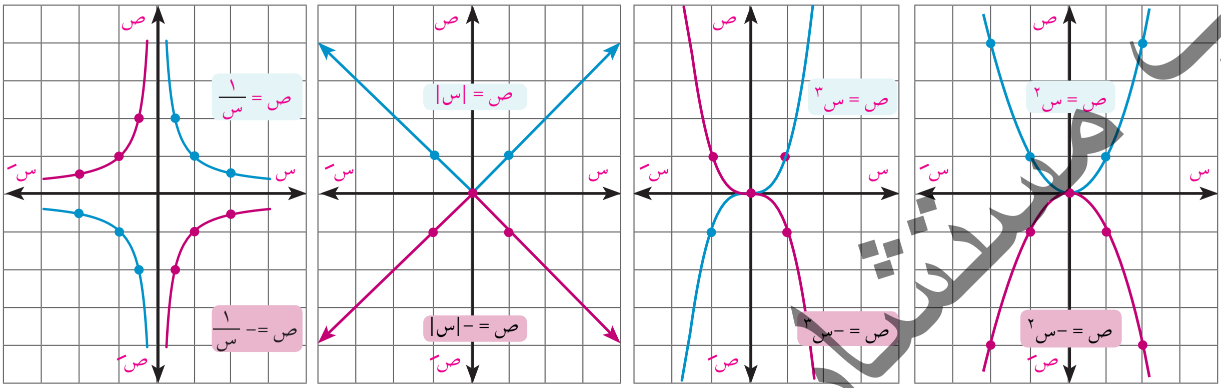




تطبيق: باستخدام الحاسبة الرسومية ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٤ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

ثالثًا: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.



ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

تعلم

رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

مثال

استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

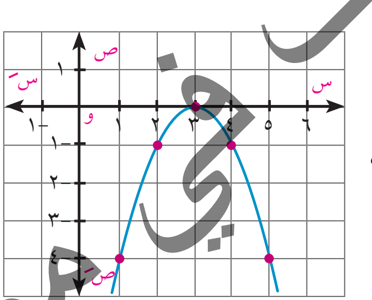
⑥ باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

أ ر(س) = -(س - ٣)^{٢}

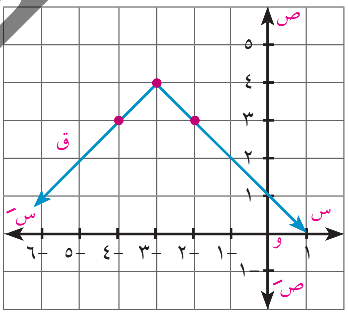
ب ق(س) = ٤ - |س+٣|

ج ع(س) = ٢ - $\frac{١}{س - ٣}$

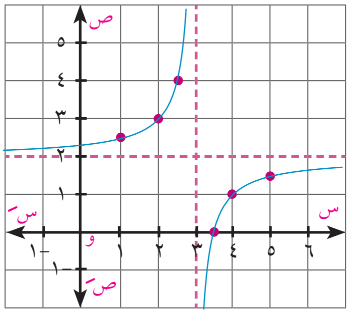
الحل



أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = س^{٢} فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.



ب منحنى ق(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و س'}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



ج منحنى ع(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = $\frac{١}{س}$ فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣، ٢)

حاول أن تحل

١٠ في كل ممايأتى ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ ر(س) = ٣ - (س+١)^{٢} **ب** ر(س) = - (س - ٣) ^{٣}

ج ر(س) = ٣-|س - ٥|

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

مثال

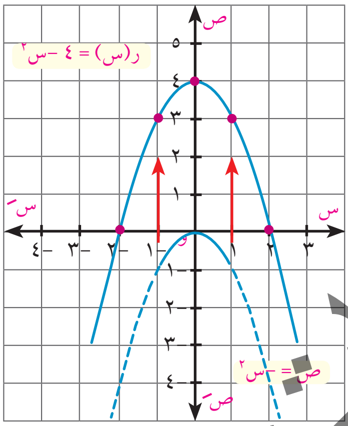
استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

٧ مستخدمًا التحويل المناسب، ارسم منحنيى الدالتين ر ، ق حيث ر(س) = ٤ - س^{٢} ، ق(س) = |٤ - س^{٢}|

الحل

أولًا: رسم منحنى الدالة ر

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} بانعكاس في محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ويوضحه شكل (١)



شكل (١)

ثانيًا: رسم منحنى الدالة ق

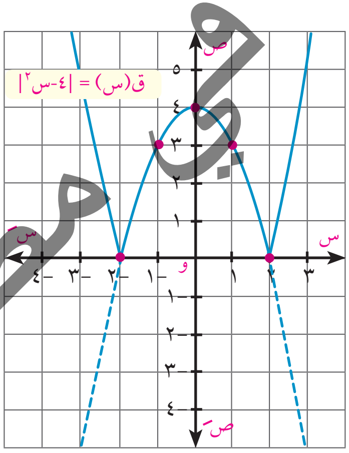
∵ ق (س) = | ٤ - س^{٢}| ∴ ق (س) = |ر(س)|

فيكون الإحداثى الصادى لجميع نقط منحنى الدالة ق موجبًا حيث:

ص = |ر(س)|

$$∴ ص = \begin{cases} ر(س) & \text{عندما } ر(س) \geqslant ٠ \\ -ر(س) & \text{عندما } ر(س) < ٠ \end{cases}$$

أى أن منحنى الدالة ق يقع فى الربعين الأول والثانى فقط وهذا يعنى إنعكاسًا لمنحنى الدالة ر لكل ر(س) < ٠ فى محور السينات كما فى شكل (٢).

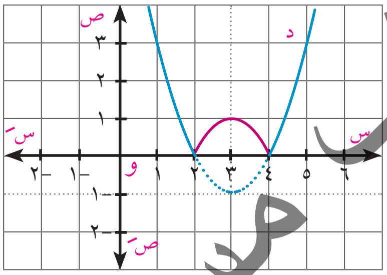


شكل (٢)

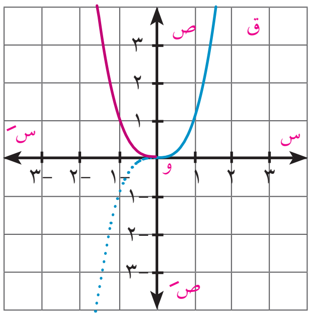
حاول أن تحل

(١١) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:

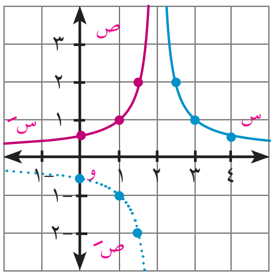
أ



ب



جـ



رابعًا: تمدد منحنى الدالة: *Expanding of graphs*

عمل تعاونى

رسم منحنى ر(س) = أ د (س)

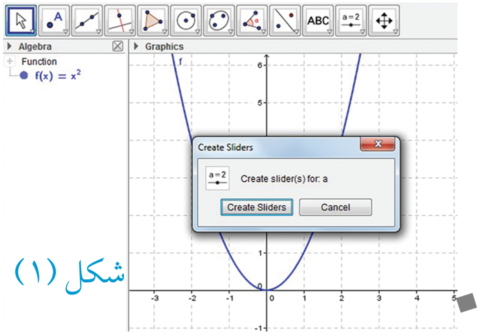
اعمل مع زميل.

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س^٢ باستخدام برنامج *Geogebra* وفى مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

↵ 2 ^ χ ◀ ▶ *a* ← إبدأ

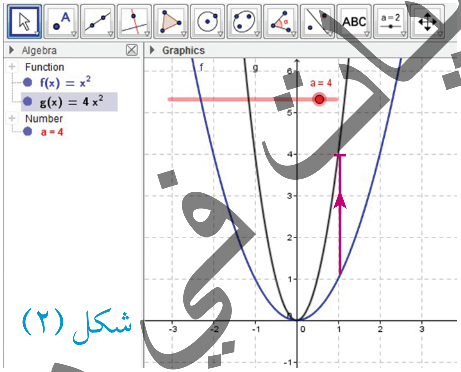
لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

إختر منها *Create sliders*

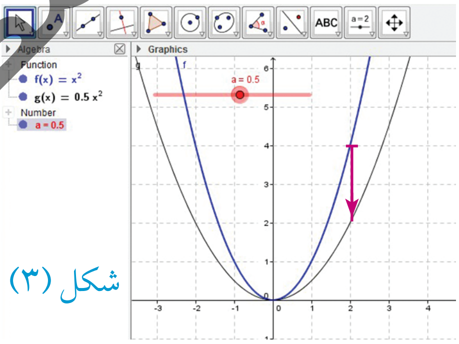

Algebra
Graphics
Function
f(x) = x²
Create Sliders
a=2
Create slider(s) for: a
Create Sliders
Cancel

شكل (١)

٢) استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث a>١ ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د لكل س ∈ ع كما في شكل (٢) وعندما a < ١ كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟


Algebra
Graphics
Function
f(x) = x²
g(x) = 4 x²
Number
a = 4
f
g
a = 4

شكل (٢)


Algebra
Graphics
Function
f(x) = x²
g(x) = 0.5 x²
Number
a = 0.5
f
a = 0.5

شكل (٣)

تعلم

رسم المنحنى ص = أ د (س)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمدد رأسي لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١،

وإنكماش رأسي لمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

رسم منحنى الدالة ر: ر(س) = أ د (س + ب) + جـ

مثال

استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

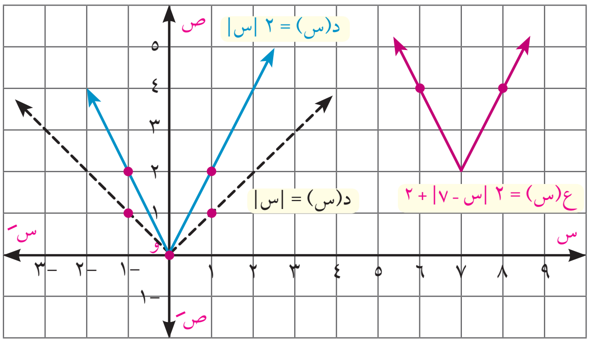
٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = ٢ |س| **ب** ع(س) = ٢|س - ٧| + ٢

الحل

أ منحنى ر(س) هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د معاملة أ = ٢ > ٠ وعلي ذلك فإن:
لكل (س ، ص) ∈ بيان د
يكون (س، ٢ ص) ∈ بيان ر

ب منحنى ع(س) هو نفس منحنى ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$



٩ حاول أن تحل

١٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^٢ لتمثيل الدالتين ر ، ع :

أ ر(س) = - $\frac{١}{٢}$ س^٢ **ب** ع(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ (س - ٥)^٢

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.

نشاط

تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟

الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigonometric functions*

أولًا: الإزاحة في اتجاه محور السينات *First: Translation on X – axis*

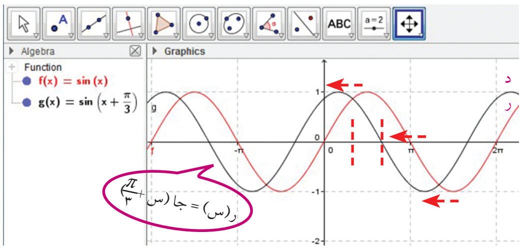
١) استخدم برنامج جيوجبرا (*GeoGebra*) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدريج (π).

٢) فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: sin (x) ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ، منقط، شرطى، متصل ،...).

٣) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: sin (x + (π/3)) أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (enter) ولون هذا المنحنى بلون آخر.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

٤) قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟


Algebra
Graphics
Function
f(x) = sin (x)
g(x) = sin (x + π/3)
د
ر
ر(س) = جا (س+π/٣)
1
-1
-2
0
-π
2π
f
g

من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى $\frac{\pi}{٣}$ (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [- ١ ، ١] وهو نفس مدى الدالة جا س ، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

فكر:

➤ ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هى: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$).

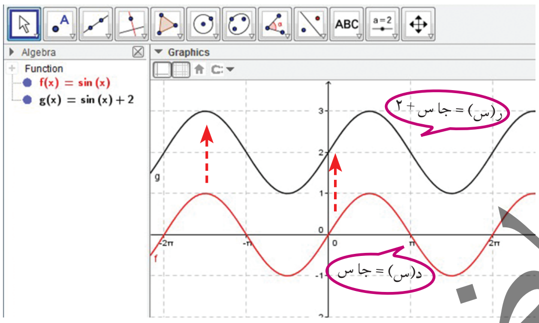
ثانيا: الإزاحة في اتجاه محور الصادات

Second: Translation on Y –axis

١) ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = جا س كما سبق.

٢) ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = جا س + ٢

بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟


Algebra
Graphics
Function
f(x) = sin (x)
g(x) = sin (x) + 2
ر(س) = جا س +٢
د(س) = جا س
3
2
1
0
-1
-2π
-π
2π
f
g

من الرسم نستنتج أن

منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة جا س ، بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

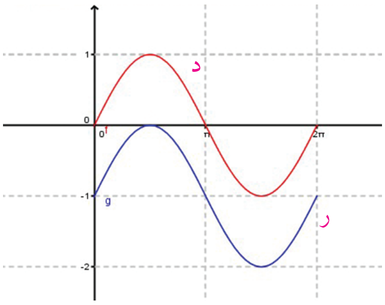
ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣] ؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة جا س + ٢ ليست زوجية وليست فردية.

تفكير ناقد:

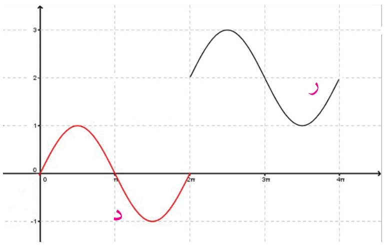
في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتى ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر وحدد مداها وابحث اطرادها.

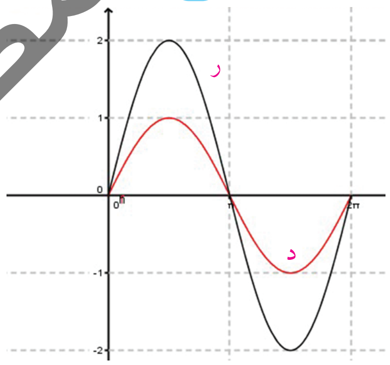
أ



ب



ج



تمــارين ١ - ٤

① حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س) حيث

$د(س) = (أ + ب)\,س^{٣} + ٣س - ٢$ ، $ر(س) = ٥س^{٣} + (أ + جـ)\,س + ب$

② ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ $د(س) = \begin{cases} |س| & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

ب $د(س) = \begin{cases} ٤ & \text{عندما } س < -٢ \\ س^{٢} & \text{عندما } س \geq -٢ \end{cases}$

جـ $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & \text{عندما } س < ١ \\ ١ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

د $د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ |س| & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

③ منحنى $ر(س) = س^{٢} + ٤$ هو نفس منحنى $د(س) = س^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

أ $\overleftarrow{و\,س}$ ب $\overleftarrow{و\,سَ}$ جـ $\overleftarrow{و\,ص}$ د $\overleftarrow{و\,صَ}$

④ منحنى $ر(س) = |س + ٣|$ هو نفس منحنى $د(س) = |س|$ بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

أ $\overleftarrow{و\,س}$ ب $\overleftarrow{و\,سَ}$ جـ $\overleftarrow{و\,ص}$ د $\overleftarrow{و\,صَ}$

⑤ نقطة رأس المنحنى $د(س) = (٢ - س)^{٢} + ٣$ هي:

أ (٢، ٣) ب (٢، -٣) جـ (-٢، ٣) د (-٢، -٣)

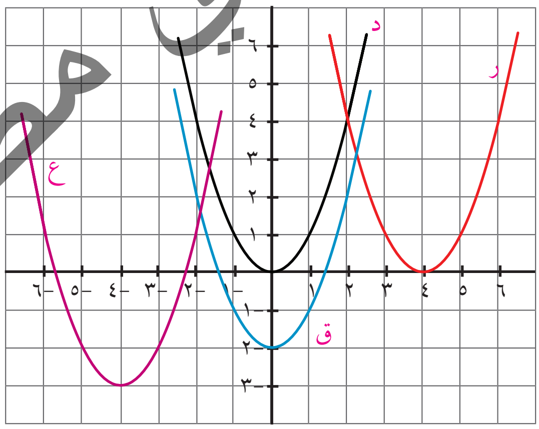
⑥ نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٤$ هي:

أ (٣، -٤) ب (-٣، -٤) جـ (٣، ٤) د (-٣، ٤)

⑦ رسم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

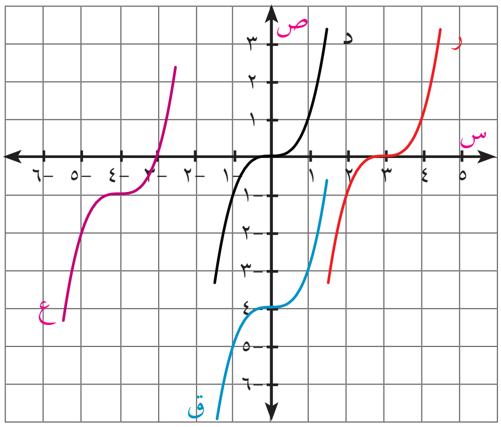
➢ ر ، ق ، ع



٨ فى الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^{٣}$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

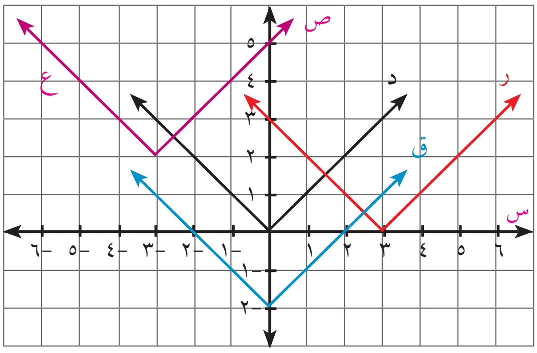
➤ ر ، ق ، ع



٩ رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص
كما فى الشكل المقابل.

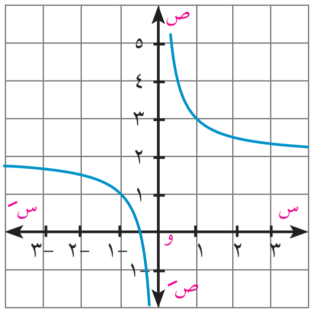
اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

➤ ر ، ق ، ع

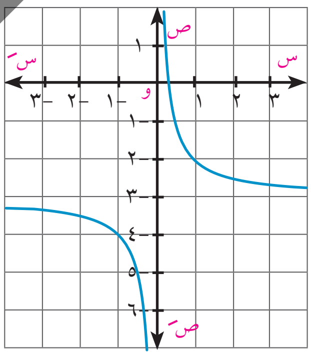


١٠ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات س ، ص. اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

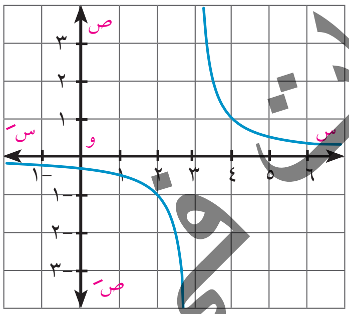
أ



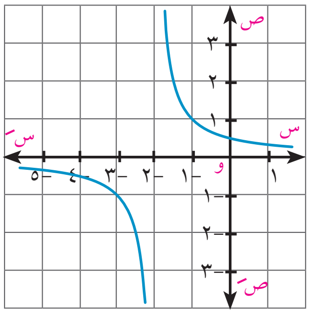
ب



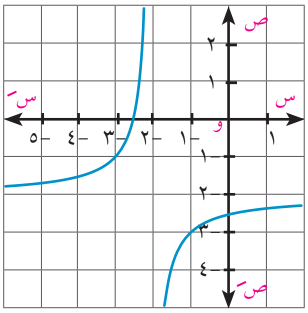
جـ



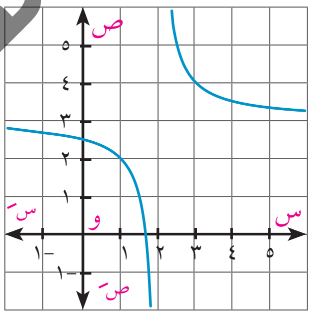
د



هـ



و



⑪ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا.

أ $د_{١}(س) = س^{٢} - ٤$ ب $د_{٢}(س) = س^{٢} + ١$ ج $د_{٣}(س) = (س + ١)^{٢}$

د $د_{٤}(س) = (س - ٣)^{٢}$ هـ $د_{٥}(س) = (س - ١)^{٢} - ٢$ و $د_{٦}(س) = (س + \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{١}{٢}$

⑫ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ $د_{١}(س) = |س| + ١$ ب $د_{٢}(س) = |س| - ٣$ ج $د_{٣}(س) = |س + ٢|$

د $د_{٤}(س) = |٥ - س|$ هـ $د_{٥}(س) = |س + ٢| + ١$ و $د_{٦}(س) = |س - ٣| - ٢$

➢ ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

⑬ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣}$. لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ $د_{١}(س) = د(س) - ٣$ ب $د_{٢}(س) = د(س) + ١$ ج $د_{٣}(س) = د\ (س - ٢)$

د $د_{٤}(س) = د(س + ٣)$ هـ $د_{٥}(س) = د(س - ٢) - ١$ و $د_{٦}(س) = د(س + ٣) + ٢$

➢ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

⑭ إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ $ق(س) = د(س + ١)$ ب $ق(س) = د(س - ٣)$ ج $ق(س) = د(س) + ٢$

د $ق(س) = د(س) - ٤$ هـ $ق(س) = د(س + ٢) - ٥$ و $ق(س) = د(س - ٢) + ٢$

⑮ استخدم منحنى الدالة د حيث د $(س) = س^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ $د_{١}(س) = ٤ - س^{٢}$ ب $د_{٢}(س) = -(س - ٣)^{٢}$ ج $د_{٣}(س) = -٢ - (س + ٣)^{٢}$

⑯ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل ما يأتى بيانيًا.

أ $د_{١}(س) = ٢ - |س|$ ب $د_{٢}(س) = -|س + ٥|$ ج $د_{٣}(س) = ٤ - |س - ٢|$

د $د_{٤}(س) = ٢|س|$ هـ $د_{٥}(س) = -٢\ |س - ١|$ و $د_{٦}(س) = ٥ - ٢\ |س + ٢|$

⑰ ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها:

أ $د_{١}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ -س^{٢} - ٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ ب $د_{٢}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } -٤ \leqslant س < ٠ \\ -س^{٢} - ١ & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$

ج $د_{٣}(س) = س\ |س| - ١$ د $د_{٤}(س) = \frac{٢س}{س + ١}$

⑱ إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$، فارسم الشكل البيانى للدالة ل فى الحالات الآتية:

أ $ل(س) = |د(س)|$ ب $ل(س) = ٢ + |د(س)|$ ج $ل(س) = |د(س - ٢)|$

١٩ ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان:

أ د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦}$ ب د(س) = $|\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣|$، س ∈ [-١، ٤]

٢٠ **الربط مع التجارة:** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًّا.

٢١ **الربط مع الميكانيكا:** يقطع جسم مسافة ف مترًا في ٣ دقائق إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا/ دقيقة، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًّا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًّا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة اذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

٢٢ **المجتمعات العمرانية:** خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س متراً، ومساحتها ٤٠٠ مترًا مربعًا.

أ بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسياً مع عرضها.

ب اكتب قاعدة الدالة د التي تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًّا.

جـ أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التى طولها ٢٥ متراً وتحقق من ذلك جبريًّا.

تفكير ابداعى:

٢٣ إذا كان $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ أصفارًا للدالة د: د(س) = $(\text{س} - \text{أ})^{٢} - ٨$ حيث $\text{س}_{١} < \text{س}_{٢}$ وكان $\text{س}_{٣}$ ، $\text{س}_{٤}$ أصفارًا للدالة ر: ر(س) = $٥ - (\text{س} - \text{أ})^{٢}$ حيث $\text{س}_{٣} < \text{س}_{٤}$ ، أ ∈ ع فأى العبارات التالية صحيحة:

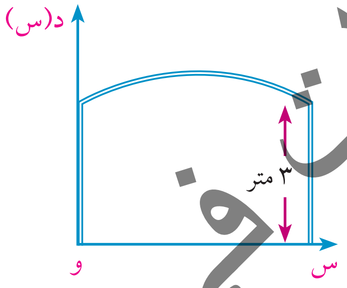
أ $\text{س}_{١} < \text{س}_{٢} < \text{س}_{٣} < \text{س}_{٤}$

ب $\text{س}_{١} < \text{س}_{٣} < \text{س}_{٤} < \text{س}_{٢}$

جـ $\text{س}_{٣} < \text{س}_{١} < \text{س}_{٢} < \text{س}_{٤}$

د $\text{س}_{٣} < \text{س}_{١} < \text{س}_{٤} < \text{س}_{٢}$

٢٤ **الربط مع الصناعة:** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = $\text{أ}(\text{س} - ٢)^{٢} + ٤$ كما فى الشكل المقابل. أوجد:

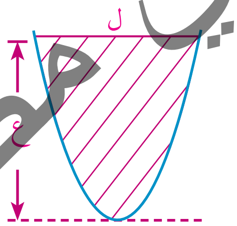


أ قيمة أ

ب أقصى ارتفاع للبوابة

جـ عرض البوابة

٢٥ **الربط مع الهندسة:** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى العلاقة م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع



أ أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د:د(س) = $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥$ بالوحدات المربعة

ب ارسم على نفس الشبكة البيانية منحيى الدالتين د، ر حيث ر(س) = $|\text{س} - ٣| - ٢$ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

١ - ٥

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

Solving Absolute Value Equations and Inequalities

سوف تتعلم

- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريًّا
- حل متباينات المقياس بيانيًّا.
- حل متباينات المقياس جبريًّا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

المصطلحات الأساسية

معادلة.	*Equation*
متباينة.	*Inequality*
حل بياني.	*Graphical Solution*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

أولًا: حل المعادلات

فكر وناقش

مثل بيانيًّا في شكل واحد منحنيى الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية. لاحظ الرسم ثم اجب:

أ ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيى الدالتين معًا؟

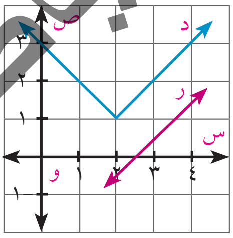
ب إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

جـ استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

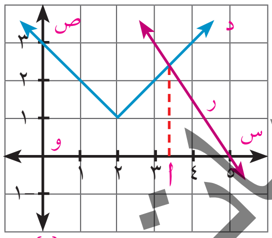
لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

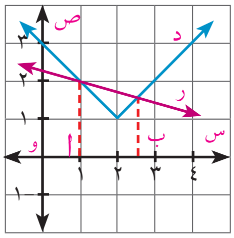
٢) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



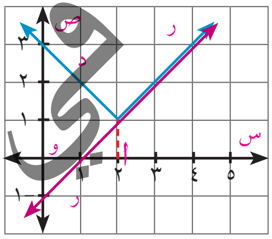
مجموعة الحل = ϕ



مجموعة الحل = {أ}



مجموعة الحل = {أ،ب}



مجموعة الحل = [أ،∞[

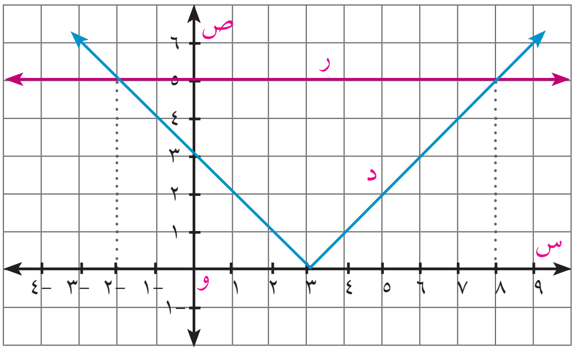
حل المعادلة: |أ س − ب| = جـ

مثال

① حل المعادلة: |س - ٣| = ٥ بيانيًّا وجبريًّا.

الحل

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥



١) نرسم منحنى الدالة د:د(س) = |س -٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات في اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

٢) على نفس الشكل نرسم ر(س)= ٥ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (٠، ٥)

∴ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (-٢، ٥) ، (٨، ٥)

∴ مجموعة حل المعادلة هي: {-٢ ، ٨}

الحل الجبرى:

من تعريف دالة المقياس: د(س) = { س - ٣ عندما س ≥ ٣
- س + ٣ عندما س < ٣

عندما س > ٣: س – ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∈]٣، ∞[

عندما س ≤ ٣ : – س + ٣ = ٥ أى أن: س = -٢ ∈]- ∞ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة هي: { – ٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البياني.

حاول أن تحل

١) حل كلًا من المعادلات الآتية بيانيًا وجبريًا.

أ |س| - ٤ = ٠ ب |س| + ١ = ٠ ج |س – ٧| = ٥

بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*

تعلم

١) |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:

|٢ × -٣| = |-٦| = ٦ ، |٢| × |-٣| = ٢ × ٣ = ٦

٢) |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، |-٤ - ٥| = |-٤| + |-٥| = ٩

لاحظ:

١) إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∈ ع+

٢) إذا كان: |أ| = |ب| فإن: أ = ب أو أ = – ب لكل أ، ب ∈ ع

٣) |س|² = |س²| = س²

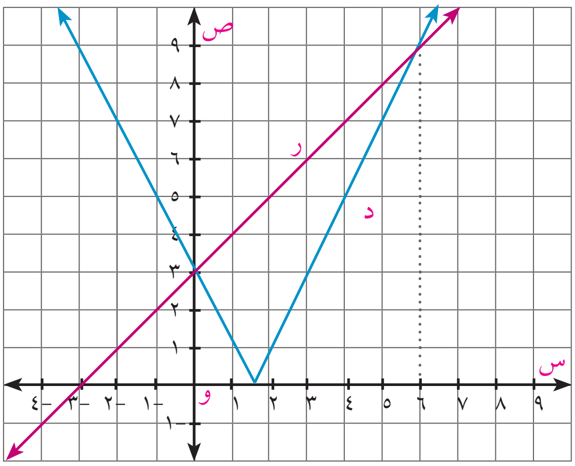
حل المعادلة |أ س + ب| = جـ س + ء

مثال

② حل المعادلة: |٢س - ٣| = س + ٣ بيانيًّا وجبريا.

الحل

بوضع د(س) = |٢س - ٣| ، ر(س) = س + ٣



الحل البيانى:

د: د(س) = |٢س − ٣| = |٢(س - $\frac{٣}{٢}$)|

∴ د(س) = ٢ |س - $\frac{٣}{٢}$|

منحنى د هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية

قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

ر: ر(س) = س + ٣ ويمثلها خط مستقيم ميله = ١ ويمر بالنقطة (٠، ٣)

∵ نقط التقاطع هى (٠ ، ٣) ، (٦، ٩)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

الحل الجبرى:

∵ |٢س - ٣| = { ٢ س - ٣ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ ، - ٢ س + ٣ عندما س < $\frac{٣}{٢}$

∴ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ تكون ٢س − ٣ = س + ٣ ومنها س = ٦ ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

، عندما س ≤ $\frac{٣}{٢}$ تكون - ٢س + ٣ = س + ٣ ومنها س = ٠ ∈]- ∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

؟ حاول أن تحل

② حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |٢س + ٤| = ١ − س

ب |٢س + ٥| = س − ٤

جـ |س - ٣| = ٣ − س

حل المعادلة: |أ س + ب| = |جـ س + ء|

مثال

③ حل المعادلة |س - ٣| = |٢س + ١| بيانيًّا.

الحل

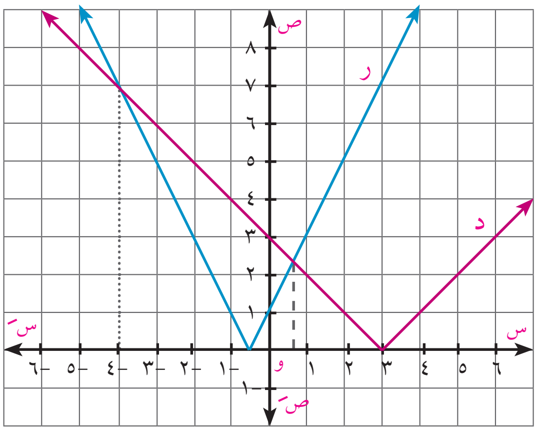
بوضع د(س) = |س -٣| ، ر(س) = |٢ س +١|

منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

ر:ر(س) =٢ |س + $\frac{١}{٢}$ |

منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{١}{٢}$ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$ ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هى: (-٤، ٧) ، ($\frac{١}{٢}$، $\frac{٥}{٢}$)

مجموعة حل المعادلة هى {-٤، $\frac{١}{٢}$ }



حاول أن تحل

③ حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.

أ |س + ٧| = |٢س + ٣|

ب | س – ٢| + | س - ١| = صفر

مثال

④ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ |س + ٧| = |س – ٥|

ب $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}$ = ٩ – ٢س

الحل

أ ∵ |س + ٧| = |س – ٥|

∴ س + ٧ = ± (س – ٥)

∴ س + ٧ = س – ٥

∴ ٧ = - ٥ (غير ممكن).

أو س + ٧ = - س + ٥

أى أن: ٢س = - ٢

∴ س = - ١

أى أن مجموعة حل المعادلة هى {-١}

التحقيق:

بالتعويض عن س = - ١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦

أى أن مجموعة الحل هى {- ١}

تذكر أن

إذا كان أ ، ب ∈ ع

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

فكر:

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

ب ∵ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ = ٩ – ٢س

∴ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢}}$ = ٩ – ٢س

أى أن: ∴ |س - ٣| = ٩ – ٢س

أولا: عندما س > ٣

فإن: س – ٣ = ٩ – ٢س

∴ ٣س = ١٢

أى أن: س = ٤ ∈]٣ ، ∞[

ثانيا: عندما س < ٣

فإن: س – ٣ = - ٩ + ٢س

∴ س = ٦

أى أن: س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل هى {٤}

تذكر أن

لأي عدد حقيقي أ يكون:

$\sqrt{\text{أ}^{٢}}$ = |أ|

فكر:

١) هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلٍّ للمعادلة ؟ وضح ذلك.

؟ حاول أن تحل

④ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|$س - ١$|$ - ٢$|$ ٢ - س$|$ = ٠

ب $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤} = ٤$

تطبيقات حياتية على حل المعادلات

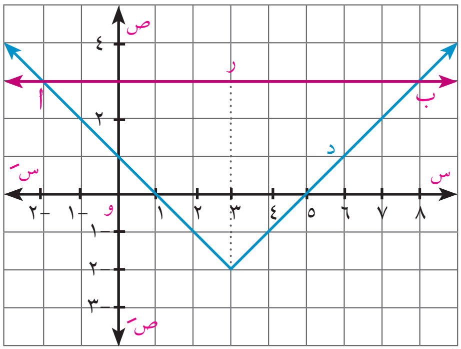
مثال

تخطيط المدن

⑤ قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٣$|$ -٢ ، ر(س)=٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة و إذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل



بتمثيل منحيي الدالتين د ، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (-٢،٣) ، ب (٨،٣) ، و تكون قطعة الأرض على شكل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية جـ حيث

أ ب = ٨-(-٢)=١٠وحدات

جـ ى = ٣-(-٢)=٥ وحدات

∴ مساحة △ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × جـ ى

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = ٢٥ (٨ × ٨) = ١٦٠٠ متراً مربعًا.

؟ حاول أن تحل

⑤ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٢$|$ -١ ، ر(س)=٥-$|$س-٢$|$

مثال

شبكات الطريق

⑥ طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = $|$س-٥$|$ ، و الثاني يمثله منحنى الدالة ر حيث ر(س) =٥ - $\frac{٢}{٣}$ س ، اذا تقاطع الطريقان في نقطتي أ، ب أوجد المسافة بين أ،ب لأقرب كيلو متر اذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

الحل

يتقاطع الطريقان عندما د(س)= ر(س) ، ويكون $|$س-٥$|$ = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س = ص

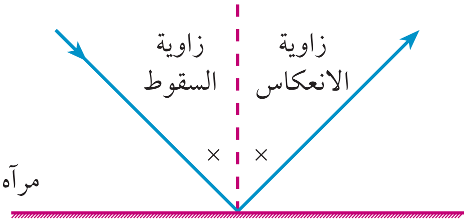
∴ س - ٥ = ٥ - $\frac{٢}{٣}$س أي س=٦ ، ص= ١ ∴ أ=(٦،١)

أو س - ٥ = $\frac{٢}{٣}$ س - ٥ أي س=٠ ، ص= ٥ ∴ ب=(٠،٥)

أ ب = $\sqrt{(٦-٥)^٢+(١-٥)^٢}$ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات ∴ المسافة بين أ ، ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

نشاط

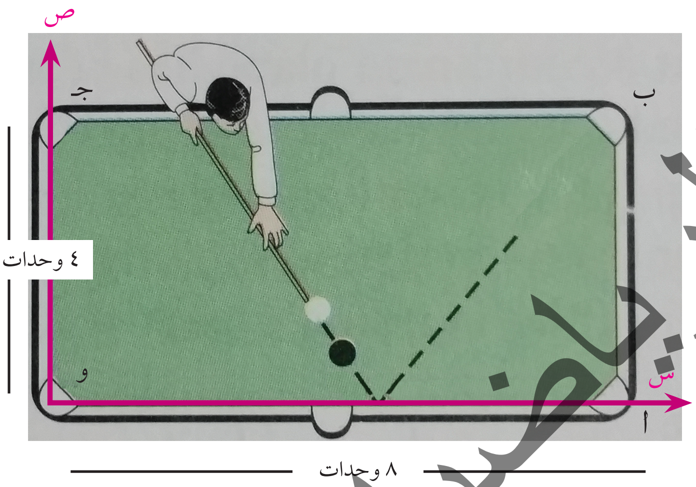


اذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساوياً لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل و بعد تصادمها مع حافة الطاولة في بعض الحالات.

١) يوضح الشكل المقابل:

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء، باعتبار $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ محوري الاحداثيات المتعامدة، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث: د(س) = $\frac{٤}{٣}$ |س-٥|

هل تسقط الكرة السوداء في الجيب ب؟ فسر إجابتك رياضيًّا.



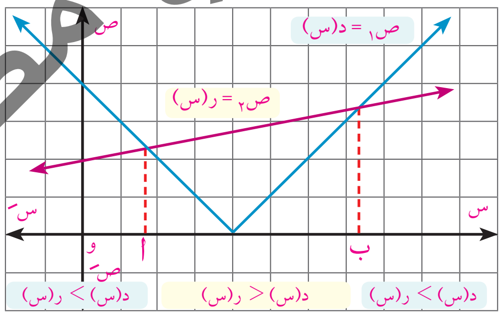
؟ حاول أن تحل

⑥ في المثال السابق تحقق من نقط التقاطع بحل المعادلتين بيانيًّا.

ثانيا: حل المتباينات *Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هي عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< أ ، > أ ، ≤ أ ، ≥ أ) والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.

حل المتباينات بيانيًّا



يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:

ص$_١$ = د(س) ، ص$_٢$ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة

د(س) = ر(س) هي {أ ، ب}

أي أن: ص$_١$ = ص$_٢$ عندما س = أ أو س = ب

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

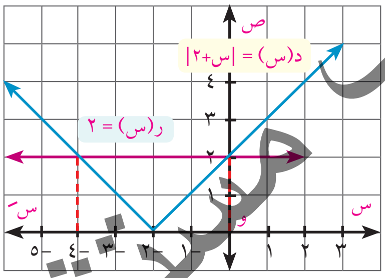
ويلاحظ: ص$_{١}$ > ص$_{٢}$ أى د(س) > ر(س) عندما س ∈]أ، ب[

ص$_{١}$ < ص$_{٢}$ أى د(س) < ر(س) عندما س ∈]- ∞، أ[∪]ب، ∞[

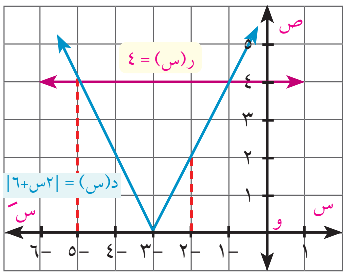
مثال

٧

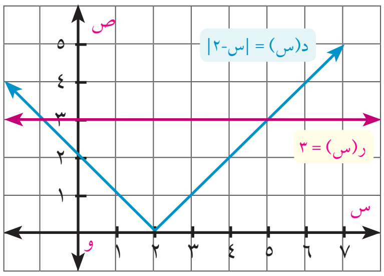
أ



ب



جـ



مجموعة حل المتباينه

|س+٢| < ٢

هى:]-٤، ٠[

مجموعة حل المتباينه

|٢ س + ٦| ≥ ٤

هى:]-∞، -٥] ∪ [-١، ∞[

أى أن: ع -]-٥، -١[

مجموعة حل المتباينه

|س - ٢| ≤ ٣

هى: [-١، ٥]

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

أ |س + ٢| ≤ ٢ ب |٢ س + ٦| ≤ ٤ جـ |س - ٢| > ٣

حل المتباينات جبريًا

تعلم

أولاً: إذا كان |س| ≤ أ ، أ > ٠ فإن: -أ ≤ س ≤ أ

ثانيًا: إذا كان |س| ≥ أ ، أ > ٠ فإن: س ≥ أ أو س ≤ -أ

مثال

٨ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٣| < ٤ ب $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}$ ≥ ٤

جـ $\frac{١}{|٢\text{س} - ٣|}$ ≥ ٢

الحل

أ ∵ |س - ٣| < ٤ أى -٤ < س - ٣ < ٤ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ -٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣ أى أن: -١ < س < ٧

∴ مجموعة الحل =]-١، ٧[

تذكر أن

لكل من أ، ب، جـ

إذا كان: أ > ب ، ب > جـ

فإن أ > جـ

إذا كان: أ > ب فإن

أ + جـ > ب + جـ

أجـ > ب جـ عند جـ > ٠

أجـ < ب جـ عند جـ < ٠

إذا كان أ ، ب موجبتان ،

أ < ب فإن $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$

ب ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢} = |س - ١|$ أى أن: $|س - ١| \geq ٤$

∴ $س - ١ \geq ٤$ أى $س \geq ٥$ ، أ $س - ١ \leq -٤$ أى $س \leq -٣$

$س \in ع -]-٣ ، ٥[$ ∴ مجموعة حل المتباينة هى $]-\infty ، -٣] \cup [٥ ، \infty[$

جـ ∵ $\frac{١}{|٢س - ٣|} \geq ٢$ وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين ∴ $|٢س - ٣| \leq \frac{١}{٢}$ ، $س \neq \frac{٣}{٢}$

∴ $-\frac{١}{٢} \leq ٢س - ٣ \leq \frac{١}{٢}$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة ∴ $-\frac{١}{٢} + ٣ \leq ٢س - ٣ + ٣ \leq \frac{١}{٢} + ٣$

∴ $\frac{٥}{٢} \leq ٢س \leq \frac{٧}{٢}$ وبالقسمة على ٢ ∴ $\frac{٥}{٤} \leq س \leq \frac{٧}{٤}$

∴ مجموعة حل المتباينة هى $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$

حاول أن تحل

⑧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ $|س - ٧| < ١١$ **ب** $|٣س + ٧| \leq ٨$ **جـ** $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} \geq ٨$ **د** $\frac{١}{|٣س|} \geq ٥$

مثال

(تطبيق حياتى على حل المتباينة)

⑨ تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعي بتوظيف قارئ العداد اذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨سم ، ١٩٢سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

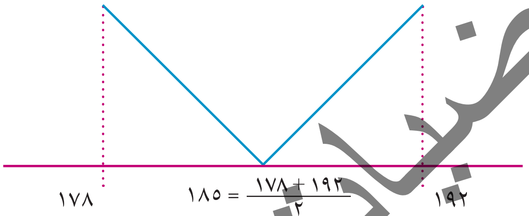
الحل

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

حيث $١٧٨ \leq س \leq ١٩٢$ ، بإضافة -١٨٥ الي أطراف المتباينة.

$١٧٨ - ١٨٥ \leq س - ١٨٥ \leq ١٩٢ - ١٨٥$

$-٧ \leq س - ١٨٥ \leq ٧$ أي أن $|س - ١٨٥| \leq ٧$



حاول أن تحل

⑨ اكتب متباينة القيمة المطلقه التي تعبر عن:

أ درجة طالب في اختبار ما تراوح بين ٦٠ الي ١٠٠ درجة.

ب درجة حرارة مقاسة بالترمومتر الطبي يتراوح بين ٣٥°C ، ٤٢°C

جـ توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تفكير ناقد: اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتى:

أ $-٤ \geq س \geq ٤$ **ب** $٠ < س < ٦$

جـ $س \leq -٢$ ، $س \geq ٢$ **د** $ع - [-٢ ، ٦]$

تمــارين ١ – ٥

أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١) |س - ٢| = ٣

(٢) |٣ - ٢ س| = ٧

(٣) |س + ٢| = ٣ س - ١٠

(٤) |س + ٢| + س - ٢ = ٠

(٥) س + |س| = ٢

(٦) |س – ٢| = ٣ س - ٤

(٧) |س – ١| = س - ٢

(٨) |٢س - ٦| = |س - ٣|

(٩) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩} + ٢\text{س} = ٩$

أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٠) |س – ٣| = ٧

(١١) |س + ٢| + س - ٢ = ٠

(١٢) |س – ٢| = ٣ س - ٤

(١٣) |٢ س - ٤| = |س + ١|

(١٤) |س| + س = ٠

(١٥) |س + ٢| = |س - ٣|

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًّا:

(١٦) |س – ١| < ٢

(١٧) |س - ٢| < ٣

(١٨) |٥ – س| > ٣

(١٩) |٢ س - ٣| ≥ ٧

(٢٠) |س + ٣| > -١

(٢١) |٢ س - ٥| ≥ ٢

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبريًّا:

(٢٢) |س - ٣| ≤ ١٥

(٢٣) |٣ س - ٢| < ٤

(٢٤) |٣ س - ٧| ≥ ٢

(٢٥) |٣س + ٢| + ٥ < ٤

(٢٦) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١} \geq ٤$

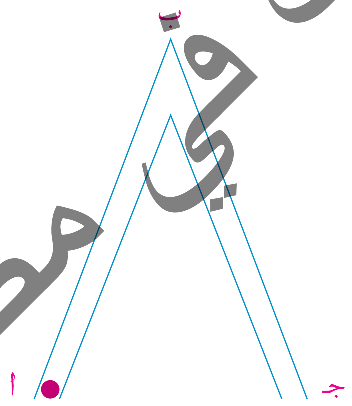
(٢٧) $\sqrt{٤\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٩} \leq ٩$

(٢٨) |٢س - ٣| + |٦ – ٤س| < ١٢

(٢٩) $\frac{١}{|٢\text{س} - ٥|} \geq ٣$

(٣٠) $\frac{١}{|٢\text{س} - ٣|} > ٢$

(٣١) الربط بالميكانيكا:



يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨سم/ث من الموضع أ إلى الموضع جـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم و الموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ |٥ - ن| حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالسنتيمترات.

أ احسب المسافة بين الجسم و الموضع ب بعد ثانيتين و بعد ٨ ثوان ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك

ب متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب، فسر إجابتك.

جـ متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب.

ملخص الوحدة

١ **الدالة:** هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س ، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س عنصرًا وحيدًا من عناصر ص ، وتكتب رمزيًا بالصورة $د: س \longrightarrow ص$، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى: المجال، المجال المقابل، وقاعدة الدالة.

وتسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

٢ **اختبار الخط الرأسى:** إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد وقطع الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البيانى فى نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.

٣ **دالة متعددة التعريف:** هى دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

٤ **العمليات على الدوال:** إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$، $م_2$ فإن:

- $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
- $(د_1 . د_2)(س) = د_1(س) . د_2(س)$ ، مجال $(د_1 . د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
- $(\frac{د_1}{د_2})(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq 0$ ، مجال $(\frac{د_1}{د_2})$ هو $(م_1 \cap م_2) - ف(د_2)$

حيث $ف(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

٥ **تركيب الدوال:** إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فيمكن تركيب الدالة ع من الدالتين د ، ر حيث $ع = ر \circ د$ وتقرأ ر تركيب د ويكون $ع(س) = (ر \circ د)(س) = ر[د(س)]$

٦ **الدالة الزوجية والدالة الفردية:**

الدالة الزوجية: يقال للدالة $د: س \longrightarrow ص$ إنها دالة زوجية إذا كان $د(-س) = د(س)$ لكل $س ، -س \in س$.

الدالة الفردية: يقال للدالة $د: س \longrightarrow ص$ إنها دالة فرديةإذا كان $د(-س) = -د(س)$ لكل $س ، -س \in س$.

٧ **الدالة الأحادية:** الدالة $د: س \longrightarrow ص$ تسمى دالة أحادية إذا كان:
لكل $أ ، ب \in س$ و $د(أ) = د(ب)$ فإن $أ = ب$ أو لكل $أ \neq ب$ فإن $د(أ) \neq د(ب)$

٨ **اختبار الخط الأفقى:** تكون $د : س \longrightarrow ص$ دالة أحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.

٩ **اطراد الدوال:** تكون الدالة د تزايدية فى الفترة $]أ ، ب[$ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2 \in]أ ، ب[$ ، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) > د(س_1)$:

وتكون د تناقصية فى الفترة $]أ ، ب[$ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2 \in]أ ، ب[$، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) < د(س_1)$

وتكون د ثابتة فى الفترة $]أ ، ب[$ إذا كان لكل $س_1$، $س_2 \in]أ ، ب[$ ، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) = د(س_1)$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

١٠ **الدالة الخطية:** أبسط صورها: د(س) = س ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

١١ **الدالة التربيعية:** أبسط صورها د(س) = $س^{٢}$ ، نقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)، معادلة محور التماثل س = ٠

١٢ **الدالة التكعيبية:** أبسط صورها د(س) = $س^{٣}$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

١٣ **دالة المقياس: (القيمة المطلقة)**

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، وتعرف على النحو التالى: $د(س) = \begin{cases} س ، & س \geqslant ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$

ويمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ وميل الآخر = -١ ويكون:

$|س| \geqslant ٠$ ، $|-س| = |س|$ ، $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

١٤ **الدالة الكسرية:** أبسط صورها هى د(س) = $\frac{١}{س}$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

١٥ **التحويلات الهندسية** للدالة د، حيث ص = د(س) ، ا > ٠ تحدد بالآتي:

- إذا كانت ص = د(س) + ا فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د (س) - ا فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار ا
- إذا كانت ص = د(س + ا) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار ا
- اذا كانت ص = د (س - ا) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار ا
- اذا كانت ص = د (س) فإنها تمثل بانعكاس منحنى د فى محور السينات.
- اذا كانت ص =ا د (س) فإنها تمثل بتمدد رأسي لمنحنى د إذا كان ا > ٠ وإنكماش رأسي إذا كان ٠ < ا < ١

١٦ **خواص مقياس العدد:**

أ |ا ب| = |ا| × |ب|

ب |ا + ب| ≤ |ا| + |ب|

ج إذا كان |س| ≤ ا ، ا > ٠ فإن: -ا ≤ س ≤ ا

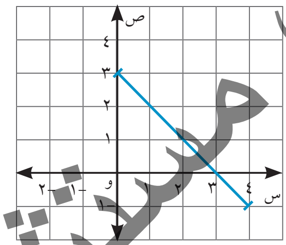
د إذا كان |س| ≥ ا ، ا > ٠ فإن: س ≥ ا أو س ≤ -ا

تمــارين عامة

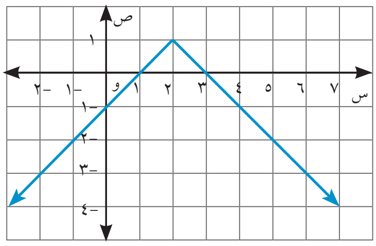
① فى الأشكال البيانية الآتية:

أولًا: عين مدى الدالة   ثانيًا: حدد الدوال الأحادية   ثالثًا: ادرس اطراد كل دالة.

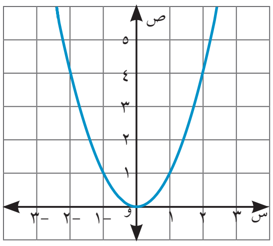
أ



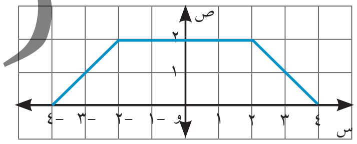
ب



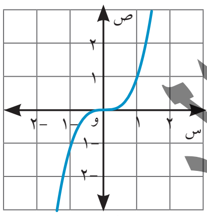
ج



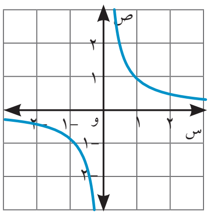
د



ه



و



② أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

أ د$_{١}$(س) = ٢س^{٣} + س + ٣   ب د$_{٢}$(س) = $\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$ ج د$_{٣}$(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

د د$_{٤}$(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ه د$_{٥}$(س) = $\frac{٣}{\sqrt{\text{س} + ٢}}$ و د$_{٦}$(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}}$

③ استخدم منحنى الدالة د حيث ص = س لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ ر$_{١}$(س) = ٤ + س   ب ر$_{٢}$(س) = س - ١   ج ر$_{٣}$(س) = س + $\frac{٣}{٢}$

ثم أثبت أن كل دالة من هذه الدوال دالة أحادية وابحث اطراد كل منها.

④ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل الدالة ر بيانيًا ثم ابحث اطرادها:

أ ر(س) = |س - ١| ب ر(س) = ٢ - |س| ج ر(س) = |س + ٢| - ٣

ثم ابحث اطراد كل منها.

⑤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} لتمثيل ما يأتى بيانيًا:

أ ر$_{١}$(س) = س^{٢} – ٣   ب ر$_{٢}$(س) = ٢ – س^{٢} ج ر$_{٣}$(س) = (س – ٢)^{٢} + ١

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

٦ استخدم منحنى الدالة د، حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل ما يلي بيانيًا:

أ $ر_١(س) = (س + ٣)^٣$ ب $ر_٢(س) = -(س - ١)^٣$ ج $ر_٣(س) = (س - ١)^٣ - ٢$

د $ر_٥(س) = (س + ١)^٣ - ٢$

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ لتمثيل مما يلي بيانيًا:

أ $د_١(س) = \frac{١}{س + ١}$ ب $د_٢(س) = \frac{-١}{س + ٢}$ ج $د_٣(س) = \frac{١}{س} + ٢$

د $د_٤(س) = ١ - \frac{١}{س}$ هـ $د_٥(س) = \frac{س + ١}{س}$ و $د_٦(س) = \frac{٣س - ٥}{س - ٢}$

٨ أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًا وحقق الناتج جبريًا.

أ $|٢س - ١| - ٣ = ٠$ ب $|٣س - ٢| + ٢س - ٣ = ٠$ ج $|س + ٢| = |س - ٣|$

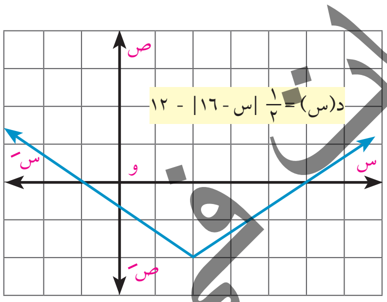
د $|س + ٣| \leq ١$ هـ $|٣س - ٢| \geq ٦$ و $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} > ٥$

٩ الربط بالهندسة: أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين د ، ر حيث:

أ $د(س) = |س + ٣| + ٢$ ، $ر(س) = ٤$

ب $د(س) = |س - ٣| - ١$ ، $ر(س) = ٣ - |س - ٣|$

١٠ ينتج مصنع ألبان عبوات وزن كل منها س جم ولمراقبة جودة الانتاج تمر العبوة على سير مراقبة الوزن الذي يسمح بمرورها اذا كان $|س - ١٦٠٠| \leq ١٥$ حدد أكبر وزن وأصغر وزن للعبوة التي يمكن طرحها في الأسواق ومن إنتاج هذا المصنع.



١١ يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$د(س) = \frac{١}{٢}|س - ١٦| - ١٢$

اختر الوحدات المناسبة للمحورين $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٦$ بيانيًا

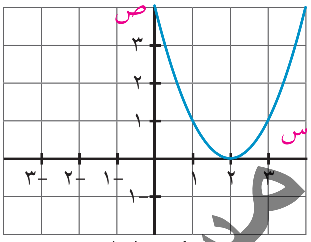
تفكير ابداعى:

١٢ ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث $د(س) = س^٢|س|$ ، $ر(س) = ٢ - |س|$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) = ر(س)$

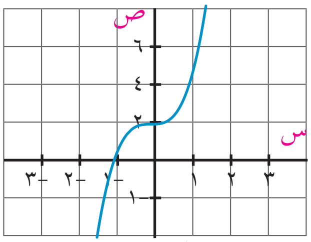
١٣ أثبت أن الدالة د حيث $د(س) = \frac{١٢}{|س| + ٢}$ زوجية، ثم أوجد جبريًّا مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٢$

اختبار تراكمى

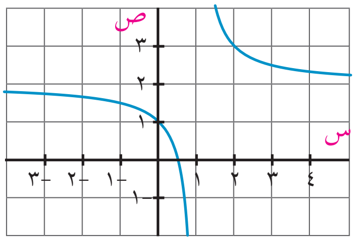
① أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = $س^{٢}$ ، ر(س) = $س^{٣}$ ، ع(س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتى:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

أ قاعدة الدالة فى شكل (١) هى.........................

ب قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى.........................

جـ قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى.........................

د الدالة ليست أحادية كما فى شكل.........................

هـ مدى الدالة في شكل (١) هو.........................

و مدى الدالة هو ع كما فى شكل.........................

ز نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى.........................

ح معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى.........................

② أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلى:

أ $د_{١}(س) = \frac{س}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

ب $د_{٢}(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

جـ $د_{٣}(س) = \frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

③ إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، ر(س) = ٢س فأوجد كلًّا من:
(د + ر)(س) ، (د . ر)(س) ، $(\frac{ر}{د})$(س) ثم أوجد قيمة (د + ر) (١) ، (د . ر) (٢) ، $(\frac{ر}{د})$ (-١)

④ ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٣| + ١، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤

⑤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ |س + ٢| = ٣س – ١٠

ب |س| - ٢ - س = ٠

جـ |٣ - ٢س| > ٥

⑥ أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانيًا وجبريًّا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢س – ٢، وتحقق من صحة الحل.

⑦ الربط بالميكانيكا: أُطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتر، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ ن – ٤,٩ $ن^{٢}$ بيِّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد

أ ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.

ب الزمن الذى يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٧٠,٤ مترًا من سطح الأرض.

الوحدة
الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها
Exponents, Logarithms and their Applications

مقدمة الوحدة

أُدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات فى أوائل القرن السابع عشر، على يد العالم جون نابير، كوسيلة لتبسيط الحسابات؛ ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر ، مستخدمين المسطرة الحاسبة، والجداول اللوغاريتمية، كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم حاصل ضرب عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية ($\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\text{ص}$)، ويرجع الفضل للعالم ليونهارت أويلر فى القرن الثامن عشر، بربط مفهوم اللوغاريتم بمفهوم الدالة الأسية ليتوسع مفهوم اللوغاريتمات ويرتبط بالدوال.

ويستفاد من المقياس اللوغاريتمى فى مجالات واسعة، فعلى سبيل المثال الديسيبل هو وحدة لوغاريتمية لقياس شدة الصوت، ونسبة الڤولت، كما يستخدم الأس الهيدروجينى (وهو مقياس لوغاريتمى) فى الكيمياء لتحديد حمضية محلولٍ ما.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الدالة الأسية د: $\text{س} \longrightarrow \text{أ}^{\text{س}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$.
- يتعرف التمثيل البياني للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يتعرف قوانين الأسس الكسرية.
- يحل معادلات أسية على الصورة $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ب}$.
- يحل تطبيقات باستخدام معادلات على الصورة $\text{أ}^{\text{س}} = \text{ب}$.
- يتعرف الدالة اللوغاريتمية $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$ أو $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$
  حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$.
- يحول جبريًّا من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- يتعرف الدالة العكسية وشرط وجودها (اختبار الخط الأفقي).
- يتعرف التمثيل البياني للدالة العكسية كصورة للدالة بانعكاس على الخط المستقيم ص = س ومثال ذلك التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية في فترات محدودة كدالة عكسية للدالة الأسية ويستنتج خواصها.
- يستنتج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغازريتمية بيانيًّا.
- يتعرف قوانين اللوغاريتمات:
- $\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\text{ص}$ حيث $\text{س} > 0$، $\text{ص} > 0$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\text{ص}$ ، $\text{س} > 0$، $\text{ص} > 0$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$، $\text{ن} \in \text{ح}$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\frac{1}{\text{س}} = -\text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{س} > 0$، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{ب}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ}}$ ، $\text{س} > 0$، $\text{أ}، \text{ب} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\text{ب} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ}}$ $\text{أ}، \text{ب} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$
- $\text{لو}_{\text{أ}}\text{أ} = 1$ $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$
- $\text{لو}_{\text{أ}}1 = \text{صفر}$ $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{1\}$
- يحل معادلات لوغاريتمية
- يحل مسائل تشتمل تطبيق قوانين اللوغاريتمات.
- يوجد قيمة اللوغاريتم باستخدام الآلة الحاسبة .
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل بعض المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

أس	*Exponent*	تضاؤل أسى	*Exponential Decay*	دالة عكسية	*Inverse Function*
قوة	*Power*	زوجي	*Even*	لوغاريتم	*Logarithm*
أساس	*Base*	فردي	*Odd*	صورة أسية	*Exponential Form*
جذور	*Radicals*	قوانين الأسس	*Laws of Exponents*	صورة لوغاريتمية	*Logarithmic Form*
أسس كسرية	*Rational Exponents*	الدالة الأسية	*Exponential Function*	لوغاريتم معتاد	*Common Logartithm*
الجذر التربيعي	*Square Root*	معادلة أسية	*Exponential Equation*	لوغاريتم طبيعي	*Natural Logarithm*
الجذر التكعيبي	*Cube Root*	الدالة المتزايدة	*Increasing Function*	دالة لوغاريتمية	*Logarithmic Function*
الجذر النوني	*n^{th} Root*	الدالة المتناقصة	*Decreasing Function*	معادلة لوغاريتمية	*Logarithmic Equation*
جذر حقيقي	*Real Root*	تماثل	*Symmetry*		
نمو أسى	*Exponential Growth*	فائدة مركبة	*Compound Interest*		

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): الأسس الكسرية.

الدرس (٢ - ٢): الدالة الأسية وتطبيقاتها.

الدرس (٢ - ٣): المعادلات الأسية .

الدرس (٢ - ٤): الدالة العكسية.

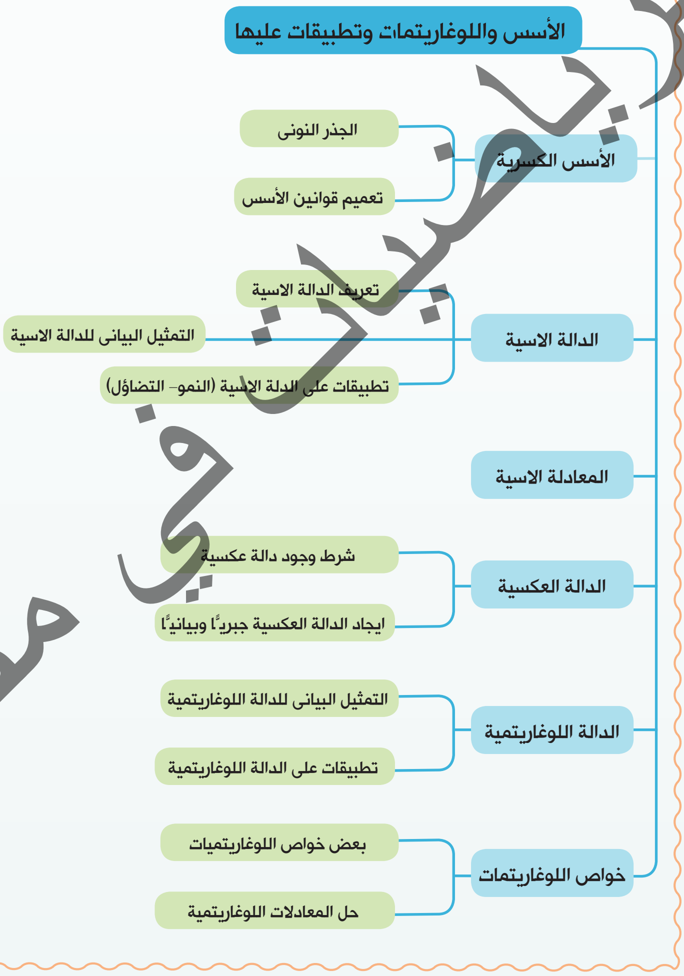
الدرس (٢ - ٥): الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.

الدرس (٢ - ٦): بعض خواص اللوغاريتمات.

الأدوات والوسائل

ورق رسم بيانى - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى - برامج رسومية.

مخطط تنظيمى للوحدة


الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها
الأسس الكسرية
الجذر النونى
تعميم قوانين الأسس
الدالة الاسية
تعريف الدالة الاسية
التمثيل البيانى للدالة الاسية
تطبيقات على الدلة الاسية (النمو -التضاؤل)
المعادلة الاسية
الدالة العكسية
شرط وجود دالة عكسية
ايجاد الدالة العكسية جبرًا وبيانيًا
الدالة اللوغاريتمية
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية
تطبيقات على الدالة اللوغاريتمية
خواص اللوغاريتمات
بعض خواص اللوغاريتميات
حل المعادلات اللوغاريتمية

٢ - ١

الأسس الكسرية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النونى.
- قوانين الأسس الكسرية.

المصطلحات الأساسية

القوة النونية	The n^{th} Power
الأساس	Base
الأس	Exponent
جذر نونى	n^{th} Root
أس كسرى	Rational Exponent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية ، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف فى هذا الدرس على الأسس الكسرية.

تعلم

الأسس الصحيحة:

تعريف

١) لكل $أ \in ع$ ولكل $ن \in ص^{+}$ فإن:

$أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times ..... \times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

ويسمى $(أ^{ن})$ **بالقوة النونية** للعدد أ، حيث يسمى العدد أ **بالأساس**، والعدد ن **بالأس** ونقول أ **مرفوع** للأس ن.

٢) $أ^{صفر} = ١$ لكل $أ \in ع - \{٠\}$

٣) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ ، $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ $أ \neq ٠$

خواص الأسس الصحيحة:

إذا كان لكل م، $ن \in ص$ ، أ ، $ب \in ع - \{٠\}$ فإن:

- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
- $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
- $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$
- $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

مثال

① أثبت أن $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}} = ١$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{(٣^{٢})^{٤ن+١} \times (٢^{٢})^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times (٢^{٤} \times ٣)^{١-ن}} = \frac{(٣)^{٨ن+٢} \times ٢^{٤-٤ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٢^{٤-٤ن} \times ٣^{١-ن}}$

$= ٣^{٨ن+٢-٩ن-١-١+ن} \times ٢^{٤-٤ن-٤+٤ن}$

$= ٣^{صفر} \times ٢^{صفر} = ١ \times ١$ (الطرف الأيسر)

حاول أن تحل

① أوجد فى أبسط صورة المقدار: $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$

مثال

② أثبت أن: $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٢} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}} = \frac{٥}{٩}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{٥^{٣} \times (٣ \times ٥)^{ن-٢} \times (٥^{٢})^{م+ن}}{(٣ \times ٥^{٢})^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{(٥)^{٣} \times (٣)^{ن-٢} \times (٥)^{ن-٢} \times (٥)^{٢م+٢ن}}{(٣)^{ن} \times (٥)^{٢ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= (٥)^{٣+ن-٢+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م} \times (٣)^{ن-٢-ن}$

$= (٥)^{١} \times ٣^{-٢} = \frac{٥}{٣^{٢}} = \frac{٥}{٩}$ **(الطرف الأيسر)**

حاول أن تحل

② أثبت أن: $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}} = \frac{١١}{١٥}$

تفكير ناقد:

أ إذا كانت $أ \in ع^{-}$، ن عددًا صحيحًا فرديًا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} > ٠$ (ب) $أ^{ن} < ٠$ (جـ) $أ^{ن} \geq ٠$ (د) $أ^{ن+١} < ٠$

ب إذا كانت $أ \in ع - \{٠\}$، ن عددًا صحيحًا زوجيًّا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتى:

(أ) $أ^{ن} > ٠$ (ب) $أ^{ن} < ٠$ (جـ) $أ^{ن-١} = ٠$ (د) $أ^{ن} \leq ٠$

الجذر النونى:

تعلمت أن:

المعادلة $س^{٢} = ٩$ لها جذران حقيقيان فقط هما $\sqrt{٩} = ٣$ أو $-\sqrt{٩} = -٣$

لاحظ أن $٣^{٢} = ٩$، $(-٣)^{٢} = ٩$

كذلك المعادلة $س^{٣} = ٨$ لها جذر حقيقي وحيد

هو $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

لاحظ أن $(٢)^{٣} = ٨$

لاحظ أن

لأى عدد حقيقي يكون $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

وعلى وجه العموم:

المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ع$، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور، ونناقش فيما يلى عدة حالات:

١) إذا كان ن عددًا زوجيًّا، أ > ٠

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ، ويسمى الجذر النونى الذي له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ.

مثل: المعادلة $س^{٤} = ١٦$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$ ، $-\sqrt[٤]{١٦} = -٢$

(وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).

لاحظ أن $(٢)^{٤} = ١٦$ ، $(-٢)^{٤} = ١٦$

٢) إذا كان ن عددًا زوجيًّا ، $أ < ٠$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

مثل: المعادلة $س^{٢} = -٩$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

٣) إذا كان ن عددًا فرديًّا ، $أ \in ع - \{٠\}$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ **(باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)**

مثل: المعادلة $س^{٥} = -٣٢$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ **(لاحظ أن $(-٢)^{٥} = -٣٢$)**

٤) إذا كان $ن \in ص^{+}$ ، $أ =$ صفر

فإن المعادلة $س^{ن} =$ صفر لها حل حقيقى وحيد هو $س = ٠$ **(المعادلة لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما $ن > ١$).**

؟ حاول أن تحل

③ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{٤} = ٨١$ ب $س^{٥} = ٢٤٣$ ج $س^{٤} = -١٦$ د $س^{٣} = -٦٤$

تفكير ناقد: وضح بمثال عددى الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$

تعلم

الأسس الكسرية *Rational Exponents*

تعلمت أن الجذر التربيعى للعدد الحقيقى غير السالب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ وبفرض $أ^{م}$ تمثل الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ

$\therefore (أ^{م})^{٢} = أ$ $\therefore أ^{٢م} = أ$ ومنها $٢م = ١$ $\therefore م = \frac{١}{٢}$

أى أن $أ^{\frac{١}{٢}}$ هى الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ أى أن $\sqrt{أ} = أ^{\frac{١}{٢}}$

بالمثل $أ^{\frac{١}{٣}}$ هى **الجذر التكعيبى الأساسى للعدد أ** أى أن $\sqrt[٣]{أ} = أ^{\frac{١}{٣}}$ وعمومًا $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$

تعريف

١) لأى عدد حقيقي $أ \geq ٠$، $ن \in ص^{+} - \{١\}$ يكون $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $أ < ٠$ ، ن عدد صحيح فردى أكبر من ١

٢) $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ حيث $أ \in ع$، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $ن > ١$، $\sqrt[ن]{أ} \in ع$

تعميم قوانين الأسس

قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

مثال

③ أوجد قيمة كل مما يأتى (إن أمكن)

أ $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$ ب $-(٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ ج $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}$

د $(-٩)^{\frac{١}{٢}}$ هـ $١٦^{\frac{٣}{٢}}$ و $(٢٧)^{\frac{٤}{٣}}$

الحل

أ $(١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

ب $-(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = -\sqrt[٣]{٢٧} = -٣$

ج $(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٢٤٣} = -٣$

د $(-٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٩} \notin ع$ [**لاحظ أن** $\sqrt{-٩} = ٣ت$]

هـ $١٦^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{١٦})^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$

و $(٢٧)^{\frac{-٤}{٣}} = \frac{١}{٢٧^{\frac{٤}{٣}}} = \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٢٧}}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

؟ حاول أن تحل

④ أوجد قيمة كل مما يأتى (إن امكن):

أ $(١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$ ب $(-٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ ج $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}}$ د $-(٣٤٣)^{\frac{٢}{٣}}$

فسر لماذا؟

العدد $(-٨)^{\frac{١}{٣}}$ معرف فى ع ، $\sqrt[٣]{-٨} = -٢ \in ع$ ، **بينما العدد** $(\sqrt[٦]{-٨})^{٢}$ غير معرف فى ع

خواص الجذور النونية *Properties of nth Roots*

١) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب $\neq ٠$ **حيث كل من** $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$

لاحظ أن

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$ إذا كان ن فردى

مثال

④ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $-\sqrt[٣]{٨أ^{٦}ب^{٩}}$ ب $\sqrt[٤]{١٦س^{٤}ص^{٨}}$

الحل

أ $-\sqrt[٣]{٨أ^{٦}ب^{٩}} = -\sqrt[٣]{٨} \times \sqrt[٣]{أ^{٦}} \times \sqrt[٣]{ب^{٩}} = -٢أ^{٢}ب^{٣}$

ب $\sqrt[٤]{١٦س^{٤}ص^{٨}} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{٨}} = ٢|س|ص^{٢}$

حاول أن تحل

٥ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $\sqrt[٤]{١٦\,\text{أ}^{١٢}}$ ب $\sqrt[٦]{(\text{س} + ٢\text{ص})^{١٨}}$

مثال

٥ أوجد فى أبسط صورة كل من

أ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ ب $\frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٦}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٣}}}$

الحل

أ المقدار $= (٢ \times ٣^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٣})^{-\frac{١}{٢}} = ٢^{-\frac{١}{٢}} \times ٣^{-\frac{٢}{٣}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{\frac{٢ \times ٣}{٢}} \times ٣^{-\frac{١}{٢}} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٢^{\frac{-١ + ٦ - ٣}{٢}} \times ٣^{\frac{-٢ + ٣ - ١}{٢}} = ٢^{\frac{٢}{٢}} \times ٣^{٠} = ٢ \times ١ = ٢$

ب المقدار $= \frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (٣ \times ٧^{٢})^{\frac{١}{٦}}}{(٣^{٢} \times ٧)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٦}} \times ٧^{\frac{١}{٣}}}{٣^{\frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣}}}$

$٣^{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} - \frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}} = ٣^{٠} \times ٧^{٠} = ١ \times ١ = ١$

حاول أن تحل

٦ أثبت أن:

أ $\frac{(٣٤٣)^{٢\text{س} - \frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣\text{س} + ١}}{(١٩٦)^{٣\text{س}} \times ٤} = \frac{١}{٧}$ ب $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

حل المعادلات الآسية في ع

مثال

٦ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$ ب $(٢\,\text{س} + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

ج $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ١٠\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$ د $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٦]{\text{س}^{٥}} = ٦$

لاحظ أن

إذا كان

$\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{أ}$

فإن $\text{س} = \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

حيث م عدد فردى

إذا كان

$\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \text{أ}$

فإن $\text{س} = \pm\, \text{أ}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

حيث م عدد زوجى

م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

الحل

أ $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

$\text{س} = (١٢٨)^{\frac{٢}{٧}}$ $\text{س} = (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}}$

$\text{س} = ٢^{٢} = ٤$ $\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

ب $(٢\,\text{س} + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

$((٢\text{س} + ٣)^{\frac{٤}{٣}})^{٣} = (٣^{٤})^{٣}$ برفع الطرفين للقوة ٣

$(٢\,\text{س} + ٣)^{٤} = ٣^{١٢}$

$٢\text{س} + ٣ = \pm (٣^{١٢})^{\frac{١}{٤}}$ ‏ ‏ $٢\text{س} + ٣ = \pm ٣^{٣}$

إما $٢\text{س} + ٣ = ٢٧$ ‏ ‏ $٢\text{س} = ٢٤$ ‏ ‏ $\therefore \text{س} = ١٢$

أو $٢\text{س} + ٣ = -٢٧$ ‏ ‏ $٢\text{س} = -٣٠$ ‏ ‏ $\therefore \text{س} = -١٥$

م.ح = {١٢، -١٥}

ج $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ١٣\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٣٦ = ٠$

$(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

إما $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ ‏ ‏ أو $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٤ = ٠$

$\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$ ‏ ‏ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{٢}$

$\text{س} = \pm (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ‏ ‏ $\text{س} = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{س} = \pm ٢٧$ ‏ ‏ $\text{س} = \pm ٨$

م.ح = {٢٧، -٢٧، ٨، -٨}

د $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} - ٣١\sqrt[٦]{\text{س}^{٥}} - ٣٢ = ٠$

$\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - ٣١\text{س}^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$

$(\text{س}^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢)(\text{س}^{\frac{٥}{٦}} + ١) = ٠$

إما $\text{س}^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$ ‏ ‏ أو $\text{س}^{\frac{٥}{٦}} + ١ = ٠$

$\text{س}^{\frac{٥}{٦}} = ٢^{٥}$ ‏ ‏ $\text{س}^{\frac{٥}{٦}} = -١$ مرفوض

$\text{س} = (٢^{٥})^{\frac{٦}{٥}}$

$\text{س} = ٦٤$

م.ح = {٦٤}

حاول أن تحل

⑦ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ ‏ ‏ **ب** $(\text{س} + ١)^{\frac{-٥}{٢}} = ٣٢^{\frac{-١}{٢}}$ ‏ ‏ **ج** $\sqrt[٤]{\text{س}^{٤}} - ٣\sqrt[٤]{\text{س}^{٢}} = ٤$

تمـــاريـن ٢ – ١

① اختصر $\dfrac{\sqrt{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$

② متى تكون العلاقة $\sqrt[ن]{\text{ا}\,\text{ب}} = \sqrt[ن]{\text{ا}} \times \sqrt[ن]{\text{ب}}$ صحيحة لجميع قيم ا ، ب الحقيقية.

③ أكمل ما يأتي:

أ $(٨)^{\frac{٢}{٣}}$ فى أبسط صورة تساوى ....

ب $(٦\frac{١}{٤})^{\frac{٣}{٢}}$ فى أبسط صورة تساوى ....

ج $(\frac{١٦}{٦٢٥})^{-\frac{٣}{٤}}$ فى أبسط صورة تساوى ....

د $\sqrt[٣]{(٣\frac{٣}{٨})^{-١}}$ فى أبسط صورة تساوى ....

هـ $(٥^{٢} - ٣^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ فى أبسط صورة تساوى ....

④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان $٥^{\text{س}} = ٢$ فإن $٢٥^{\text{س}}$ تساوى .... (١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)

ب $(٢^{٧} \div ٢^{٥})^{-\frac{١}{٢}}$ تساوى .... $(٢ ، -٢ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢})$

ج إذا كان $\text{س}^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س تساوى .... (٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)

د أي مما يأتي لا يساوي $(\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}})$ ‏ $((\sqrt[٥]{\text{س}})^{٤} ، \sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} ، \text{س}^{\frac{٤}{٥}} ، (\text{س}^{\frac{١}{٥}})^{٤})$

هـ إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س تساوى .... (٤ ، ±٢ ، ٢ ، -٢)

و مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢)^{٤} = ١٦$ يساوي .... ({صفر} ، {٤} ، {٨} ، {٠، ٤})

ز إذا كان $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ تساوى .... (٧، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)

⑤ اكتشف الخطأ:

أ $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^{٢}} = \sqrt{٨١} = ٩$

ب إذا كان $س^{٤} = ٨١$ فإن $س = \sqrt[٤]{٨١}$ ∴ $س = ٣$

⑥ **الربط بالهندسة:** إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ع من العلاقة $نق = \left(\frac{٣ع}{٤\pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$. أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة.

⑦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

ب $س^{٤} = ٨١$

جـ $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

د $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

هـ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = صفر$

و $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

ز $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٢٥\sqrt[٣]{س} - ٥٤ = صفر$

ح $(٢س - ١)^{٤} = (س + ٣)^{٤}$

⑧ إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ فما قيمة س + ص

⑨ **تفكير ابداعى:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان س < صفر فإن: $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ =$ .... (س ، -س ، صفر ، - ١)

ب إذا كان $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي .... ($أ^{١٢}$ ، $أ^{١٦}$ ، $أ^{١٨}$ ، $أ^{٢٤}$)

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

أ $\sqrt[٣]{\frac{٧^{٤} \times ٣^{-٥}}{٢^{-٧}}}$

ب $(٢٣)^{-\frac{٣}{٢}} + (٠,٠١)^{-\frac{٥}{٣}}$

٢ - ٢

الدالة الأسية وتطبيقاتها

Exponential Function and it Applications

نشاط

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانٍ، و يستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.

الزمن بالساعة	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الخلايا	١	٢	٤	....	....	....	٦٤

١) أكمل الجدول السابق.

٢) عبِّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.

٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.

٤) عبِّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.

تعلم

الدالة الأسية *Exponential Function*

تعريف

تسمى الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ∈ ح **بالدالة الأسية.**

مثال:

د(س) = $٢^{س}$ دالة أسية **أساسها** (٢) **وأسها** (س).

د(س) = $٥^{س+١}$ دالة أسية **أساسها** (٥) **وأسها** (س+١).

د(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢س}$ دالة أسية **أساسها** $\left(\frac{١}{٣}\right)$ **وأسها** (٢س)

حاول أن تحل

① بين أى الدوال الآتية دالة أسية.

أ د(س) = $س^{٢}$

ب د(س) = $(٢)^{س}$

ج د(س) = $\frac{٣}{س + ١}$

د د(س) = $س^{٣} - ١$

هـ د(س) = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{س-١}$

و د(س) = $(-٢)^{س}$

سوف تتعلم

- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا.
- خواص الدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

دالة أسية.	*Expontential Function*
نمو أسى.	*Exponential Growth*
تضاؤل أسى.	*Exponential Decay*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

تذكر أن

الدالة الجبرية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

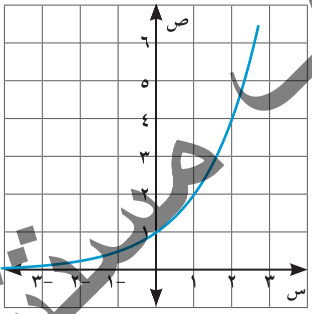
الدالة الأسية: يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لايساوى الواحد.

التمثيل البياني للدالة الأسية *Graphical Representation of Exponential Function*

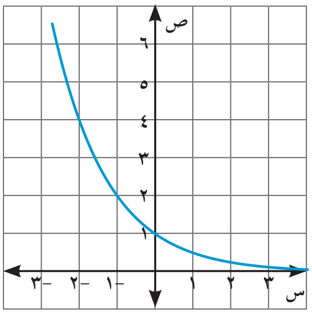
مثل بيانيًا كل من الدالتين $د(س) = ٢^{س}$ ، $ر(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$

وذلك على فترة اختيارية $س \in [-٣ ، ٣]$

س	$د_١(س)$	$د_٢(س)$
-٣	$\frac{١}{٨}$	٨
-٢	$\frac{١}{٤}$	٤
-١	$\frac{١}{٢}$	٢
صفر	١	١
١	٢	$\frac{١}{٢}$
٢	٤	$\frac{١}{٤}$
٣	٨	$\frac{١}{٨}$



$د(س) = ٢^{س}$



$ر(س) = (\frac{١}{٢})^{س}$

خواص الدالة الأسية $د(س) = أ^{س}$ حيث $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$

١) مجال الدالة الأسية $د(س) = أ^{س}$ هو ع ومداها $]٠،\infty[$

٢) إذا كان $أ > ١$ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسى معامله أ

أما إذا كان $١ > أ > ٠$ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ.

٣) منحنى الدالة $د(س) = أ^{س}$ يمر دائمًا بالنقطة (٠، ١) لجميع قيم $أ > ٠$ ، $أ \neq ١$

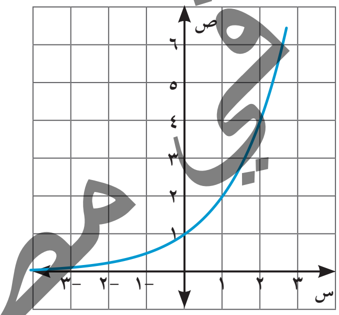
٤) $د(س) = أ^{س}$ هي دالة احادية (One - to - One)

٥) منحنى الدالة $د(س) = أ^{س}$ هو صورة منحنى الدالة $د(س) = (\frac{١}{أ})^{س}$ بالانعكاس على محور الصادات

٦) $أ^{س} \longrightarrow \infty$ عندما $س \longrightarrow \infty$ حيث $أ > ١$

$أ^{س} \longrightarrow ٠$ عندما $س \longrightarrow \infty$ حيث $١ > أ > ٠$

حاول أن تحل



② الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث $د(س) = (٣)^{س}$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث $ر(س) = (\frac{١}{٣})^{س}$، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيِّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.

③ **تفكير ناقد:** إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ حيث $٠ < أ < ١$ رتب كل مما يأتى ترتيبًا تصاعديًا د(٧) ، د(-٢) ، $د(\sqrt{٥})$ ، د(٠).

مثال

① اذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ **فأكمل ما يأتى:**

أ د(٢) = ...

ب د(س + ٢) = ... × د (س)

ج د (س) × د (- س) = ...

الحل

أ $د(٢) = ٣^{٢} = ٩$ ب $د(س + ٢) = ٣^{س+٢} = ٣^{س} \times ٣^{٢} = ٩\ د(س)$

ج $د(س) \times د(-س) = ٣^{س} \times ٣^{-س} = ٣^{س-س} = ٣^{٠} = ١$

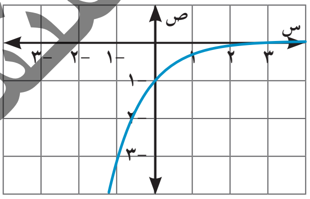
حاول أن تحل

④ في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:

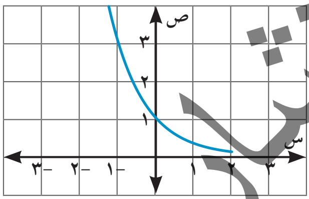
أ ص $= ٣^{س}$ ب ص $= ٣^{-س}$ ج ص $= -٣^{س}$

د ص $= -٣^{-س}$ هـ ص $= ٣^{س} - ١$ و ص $= ٣^{س-١}$

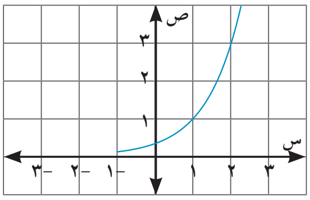
ز ص $= ٣^{١-س}$ ح ص $= ١ - ٣^{س}$



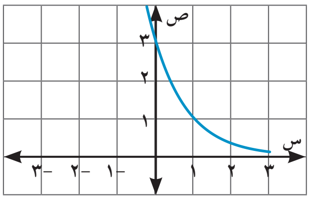
شكل (١)



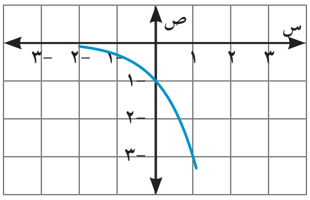
شكل (٢)



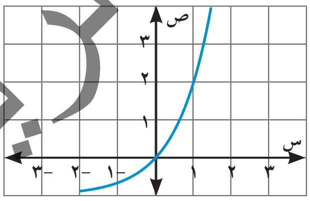
شكل (٣)



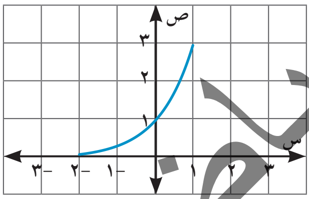
شكل (٤)



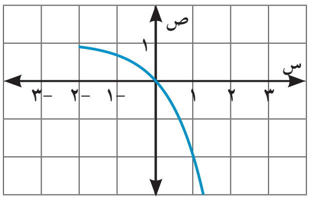
شكل (٥)



شكل (٦)



شكل (٧)



شكل (٨)

تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $أ^{س} = ب$

النمو والتضاؤل: *Growth and Decay*

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن تنمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الأضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة.

وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

أولًا: النمو الأسى: *Exponential growth*

يمكن استخدام الدالة د، حيث $د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

(ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

مثال

② **الربح المركب:** عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب ر (نسبة مئوية) لعدد ن من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى س فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$\text{جـ} = \text{أ}\left(١ + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)^{\text{ن س}}$$

مثال

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ ٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

أ العائد السنوي ب العائد الربع سنوي جـ العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $\text{جـ} = \text{أ}\left(١ + \frac{\text{ر}}{\text{س}}\right)^{\text{ن س}}$ حيث س التقسيم السنوي :

(أ) العائد السنوي $\therefore$ س = ١

$\text{جـ} = ٥٠٠٠\,(١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢$ جنيه

(ب) العائد ربع سنوي $\therefore$ س = ٤

$\text{جـ} = ٥٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠\times ٤} = ١١٠٤٠,٢$ جنيه

(جـ) العائد الشهري $\therefore$ س = ١٢

$\text{جـ} = ٥٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠\times ١٢} = ١١٠٩٨,٢$ جنيه.

حاول أن تحل

⑤ يتكاثر النحل فى أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

ثانيًا: التضاؤل الأسى *Exponential decay*

يمكن استخدام الدالة د حيث $\text{د}(\text{ن}) = \text{أ}\,(١ - \text{ر})^{\text{ن}}$ لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

○ **الربط بالتجارة:** اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ن سنة من شرائها.

ثانيًا: قدر لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الحل

أ = ١٢٠٠٠٠ ، ر = $\frac{١٢}{١٠٠}$ = ٠,١٢ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى: د(ن) = $أ(١ - ر)^{ن}$ وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:

د(ن) = $١٢٠٠٠٠\ (١ - ٠,١٢)^{ن}$ أى أن: د(ن) = $١٢٠٠٠٠\ (٠,٨٨)^{ن}$

ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:

د(٥) = $١٢٠٠٠٠(٠,٨٨)^{٦}$ = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

حاول أن تحل

٦ **الربط بالطب:** يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبى، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

تمــارين ٢ – ٢

١ أكمل ما يأتى:

أ تكون الدالة د حيث د(س) = $أ^{س}$ دالة أسية إذا كانت أ ....، س ....

ب الدالة الاسية ر حيث ر(س) = $٣^{س-١}$ أساسها هو ....

جـ الدالة هـ حيث هـ(س) = $(\frac{-١}{٢})^{س+١}$ ليست دالة أسية لأن ....

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = $أ^{س}$ مع المستقيم س = ٠ هى النقطة (........ ، ....)

هـ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = $٣^{س}$، ر(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ هو ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

ب تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت:

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

جـ الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د فى الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د(س) > ١ عندما:

(أ) س ∈ ع　　(ب) س ∈ ع^{+}　　(جـ) س ∈ ع^{-}　　(د) س ∈ ص

هـ فى الدالة الأسية ر حيث ر(س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < $\text{أ}^{\text{س}}$ < ١ عندما س ∈

(أ)]٠ ، ∞[　　(ب)]-∞ ، ٠]　　(جـ)]١ ، ∞[　　(د)]-∞ ، ١]

③ بين أى من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ د(س) = $٢\text{س}^{٣}$　　**ب** د(س) = $\frac{٢}{٣}(٥)^{\text{س}}$　　**ج** د(س) = $\frac{١}{\text{س} - ١}$

د د(س) = $٣\text{س}^{٢} - ١$　　**هـ** د(س) = $(\frac{٢}{٣})^{\text{س}-١}$　　**و** د(س) = $(-٧)^{\text{س}}$

④ مثِّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًّا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيِّن أى منها تزايدية وأى منها تناقصية:

أ د(س) = $٣^{\text{س}}$　　**ب** د(س) = $(\frac{١}{٢})^{\text{س}}$　　**ج** د(س) = $-٣ (٢)^{\text{س}}$　　**د** د(س) = $٢^{\text{س}+١} + ١$

هـ د(س) = $(\frac{١}{٢})^{\text{س}+٢} - ٢$　　**و** د(س) = $٢ (\frac{٢}{٣})^{\text{س}-١} + ١$　　**ز** د(س) = $-(\frac{١}{٢})^{٢\text{س}} + \frac{٣}{٤}$

⑤ **الربط بالأدخار:** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

حـ = م$(١ + \text{ر})^{\text{ن}}$ حيث م المبلغ، ر النسبة المئوية للفائدة ، ن عدد السنوات

⑥ **الربط بالاتصالات:** يتناقص عدد الهواتف الأرضية فى إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف فى إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور ن سنة، ثم قدِّر عدد الهواتف بعد مرور ٣ سنوات.

⑦ **الربط بالاستثمار:** بلغ عدد الأبقار فى أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًّا تقريبًا، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات.

⑧ **الربط بالسكان:** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤ ٪ سنويًّا.

أولًا: اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

ثانيًا: قدِّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

⑨ **الربط بالرياضة:** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن)، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة.

⑩ **تفكير إبداعي:** إذا كان د(س) = $٢^{\text{س}}$ فأثبت أن المقدار $\frac{١}{\text{د(س)} + ١} + \frac{١}{\text{د(-س)} + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

٢ - ٣

المعادلات الأسية

Exponential Equations

استكشف

من الجدول الآتى بين متى تتساوى $٢^{\text{س}}$ مع ٢س:

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
٢س	−٤	−٢	٠	....	....	....	....
$٢^{\text{س}}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	....	....	....	....

تعلم

المعادلة الأسية *Exponential Equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٣^{\text{س}} = ٢٧$) فنجد:

أولًا: **إذا كان** $\text{ا}^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{ن}}$ حيث $\text{ا} \notin \{٠، ١، -١\}$ **فإن** م = ن.

مثال

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٣^{\text{س}+١} = \frac{١}{٢٧}$ ب $(٢\sqrt{٢})^{\text{س}-٣} = ٨^{\text{س}-٢}$

الحل

أ $٣^{\text{س}+١} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore ٣^{\text{س}+١} = ٣^{-٣}$

$\therefore$ س + ١ = -٣ ومنها س = -٤ $\therefore$ مجموعة الحل = {-٤}

ب $(٢\sqrt{٢})^{\text{س}-٣} = ٨^{\text{س}-٢}$ $\therefore (٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}})^{\text{س}-٣} = (٢^{٣})^{\text{س}-٢}$

$\therefore (٢^{\frac{٣}{٢}})^{\text{س}-٣} = (٢^{٣})^{\text{س}-٢}$ $\therefore ٢^{\frac{٣}{٢}(\text{س}-٣)} = ٢^{٣(\text{س}-٢)}$

$\therefore \frac{٣}{٢}\text{س} - \frac{٩}{٢} = ٣\text{س} - ٦$ **بالضرب في ٢**

$\therefore$ ٣س - ٩ = ٦س - ١٢ $\therefore$ ٣س - ٦س = ٩ - ١٢

-٣س = -٣ ومنها س = ١ $\therefore$ مجموعة الحل = {١}

حاول أن تحل

① أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{٣-\text{س}} = \frac{١}{١٦}$ ب $\frac{(٣^{٢} + ٥^{٢})^{\text{س}}}{٦٨^{\text{س}}} = \frac{١}{٣٢}$

ثانيًا: **إذا كان** $\text{ا}^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{م}}$ حيث $\text{ا}، \text{ب} \notin \{٠، ١، -١\}$، فإن

إما: م = صفر

أو: ا = ب **عندما** م عدد فردي ، ا = ± ب **عندما** م عدد زوجي.

سوف تتعلم

- حل المعادلة الأسية جبريًا.
- حل المعادلة الأسية بيانيًا.

المصطلحات الأساسية

- معادلة أسية *Exponential Equation*
- الحل البياني *Graphical Solution*

الأدوات المستخدمة

- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
- آلة حاسبة علمية.

مثال

③ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$

الحل

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$ ∴ س - ٣ = صفر ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$ ∴ $٧^{س+١} = ٣^{٢(س+١)}$ ∴ $٧^{س+١} = ٩^{س+١}$

∴ س + ١ = صفر ومنها س = -١ ∴ مجموعة الحل = {-١}

حاول أن تحل

② أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات

أ $٣^{س-٥} = ٢^{س-٥}$ ب $٤^{س+٢} = ٣^{٢س+٤}$

تفكير ناقد: أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $س^{س-٢} = ٤^{س-٢}$

مثال

④ إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

أ أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س) ب إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

الحل

أ **الطرف الأيمن** = د(س + ٢) × د(س -٢) = $٣^{س+٢} \times ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$ = $٣^{٢س}$ = د(٢س) = **الطرف الأيسر**

ب ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ ∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١}(٣^{٢} - ١) = ٧٢$

∴ $٣^{س-١} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ س - ١ = ٢ ∴ س = ٣

حاول أن تحل

③ إذا كان $د_١(س) = ٨^{س}$، $د_٢(س) = ٤^{س}$

أ أثبت أن $\frac{د_١(٢س + ١) + د_٢(٣س + ٢)}{د_١(٢س - ١) + د_٢(٣س - ٢)} = ١٢٨$ ب حل المعادلة $د_١(٢س) + د_٢(٣س - ١) = ٨٠$

مثال

⑤ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$

أوجد س التى تحقق المعادلة: د(س) + د(٥ - س) = ١٢:

الحل

بالتعويض فى المعادلة د(س) + د(٥ - س) = ١٢

$٢^{س} + ٢^{٥-س} = ٢$

$٢^{س} \times ٢^{س} + ٢^{٥ - س} \times ٢^{س} = ١٢ \times ٢^{س}$ وذلك بضرب الطرفين فى $٢^{س}$

٢ س + س + ٢٥ - س + س - ١٢ × ٢س = ٠

$٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$ وبتحليل المقدار الثلاثى

($٢^{س}$ - ٤) ($٢^{س}$ - ٨) = ٠

إما: $٢^{س} = ٢^{٢}$ ومنها س = ٢

أو: $٢^{س} = ٢^{٣}$ ومنها س = ٣

حاول أن تحل

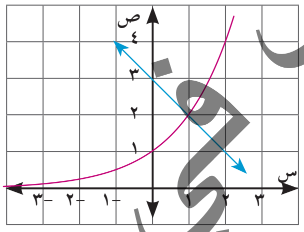
④ فى المثال السابق أثبت أن: $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} = \frac{١٨}{٢٥}$

حل المعادلات الأسية بيانيًّا *Solving Exponential Equastions Graphically*

نشاط

⑥ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنيي كل من الدالتين $د_{١}(س) = ٢^{س}$، $د_{٢}(س) = ٣ - س$، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ٣ - س$

الحل



باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنيي الدالتين $د_{١}$، $د_{٢}$، ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هي (١، ٢)

نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين $د_{١}$، $د_{٢}$ هو (١، ٢) لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: ٢س = ٣ - س هو {١}.

حاول أن تحل

⑤ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلًّا من الدالتين:

$د_{١}(س) = ٢^{س}$ ، $د_{٢}(س) = س + ٢$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = س + ٢$

تمـــارين ٢ – ٣

① اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $٢^{س+١} = ٨$ ، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

ب إذا كان $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ ، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

جـ $(\frac{١}{٢})^{ا^٢-ا-٢} = ١$ حيث ا > صفر، فإن ا = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

② أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+١} = ٤$ ب $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$ جـ $٧^{س-٢} = ١$

د $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ هـ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ و $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

ز $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ ح $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ ط $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

③ أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

④ إذا كانت $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$

⑤ إذا كانت $د(س) = ٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

⑥ أوجد بيانيًّا مستخدمًا أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

أ $٣^{س-٢} = ٣ - س$ ب $٢^{س} = ٢س$

⑦ تفكير إبداعى: إذا كان $س^{٣} = ص^{٢}$ وكان $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟

⑧ الربط بالأعداد: إذا كان مجموع الأعداد $٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + ٢^{ن}$ يُعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ٢ (٢^{ن} - ١)$

أ أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

⑨ حل كُلًّا من المعادلات الآتية:

أ $٣^{س^٢-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$ ب $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

⑩ تفكير ابداعي:

أوجد مجموعة حل المعادلة:

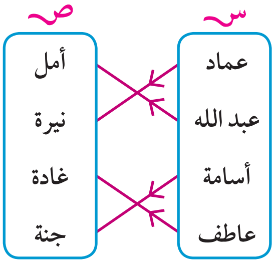
$٩^{س+١} - ٣^{س+٣} - ٣^{س} + ٣ = ٠$.

٢ - ٤

الدالة العكسية

The Inverse Function

فكر و ناقش



الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء س = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم ص = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من س إلى ص
هل العلاقة تمثل دالة؟ و إذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

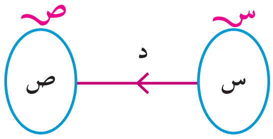
٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من ص إلى س هل العلاقة تمثل دالة؟

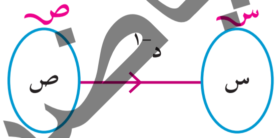
تعلم

الدالة العكسية *The Inverse Function*

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان:

لكل (س، ص) ∈ د فإن (ص، س) ∈ $د^{-1}$





مثال

① إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)} .
أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

الحل

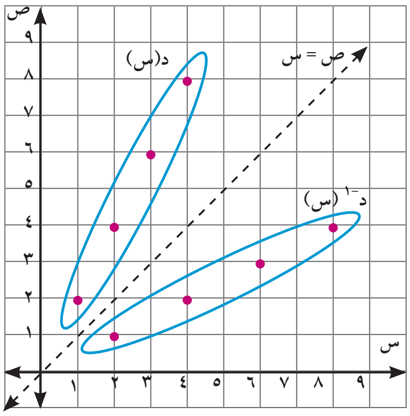
حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∵ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

∴ $د^{-1}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}

نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن $د^{-1}$ (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س



سوف تتعلم

- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًّا وجبريًّا.

المصطلحات الأساسية

دالة	*Function*
دالة عكسية	*Inverse Function*
دالة أحادية	*One – to One Function*
مجال	*Domain*
مدى	*Range*
انعكاس	*Reflection*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.

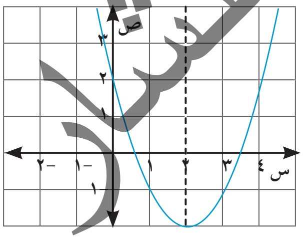
مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

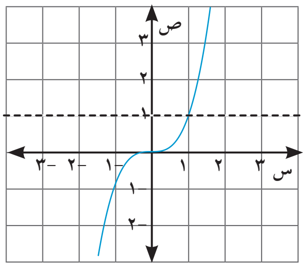
٩ حاول أن تحل

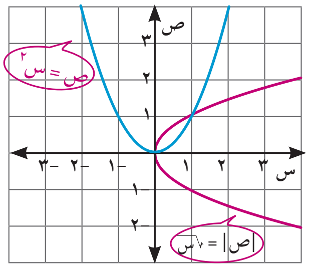
① أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

س	-٣	-٢	-١	٠	١
د(س)	٧	٣	١	٠	$\frac{١}{٢}$

اختبار الخط الرأسي	اختبار الخط الأفقي
إذا قطع أي خط رأسي منحنى ما في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.	إذا قطع أي خط أفقي منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.





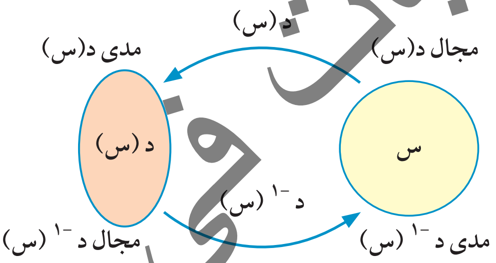


لاحظ أن:

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

مثل ص = س^2 (ليست أحادية) معكوسها $|\text{ص}| = \sqrt{\text{س}}$ لا يمثل دالة.

من خواص الدالة العكسية:



١- يقال أن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان

(د ∘ ر) (س) = س و (ر ∘ د) (س) = س

٢- مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د^{-1}(س)

مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د^{-1} (س)

تفكير ناقد:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س^2 التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

مثال

② أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س + ١ ومثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا في شكل واحد.

لاحظ أن

لإيجاد الدالة العكسية أولًا نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

الحل

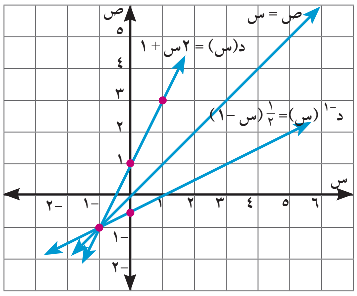
$ص = ٢س + ١$

$\therefore س = ٢ص + ١$ بتبديل المتغيرات

$\therefore ٢ص = س - ١$

$\therefore ص = \frac{١}{٢}(س - ١)$ أي $د^{-١}(س) = \frac{١}{٢}(س - ١)$

س	١	٠	-١
د(س)	٣	١	-١
$د^{-١}(س)$	٠	$\frac{-١}{٢}$	-١



نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية $د^{-١}$ منحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

حاول أن تحل

② أوجد الدالة العكسية للدالة $ص = س^٣$ ومثلهما في شكل واحد.

مثال

③ إذا كانت د دالة بحيث $د(س) = ٣ + \sqrt{س - ١}$ فأوجد

أ مجال د(س) ومدى د(س)

ب $د^{-١}(س)$ وعين مجالها ومداها

ج مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البيانى لكل من د(س) ، $د^{-١}(س)$

الحل

أ د(س) معرفة لجميع قيم $س - ١ \geqslant ٠$ أى $س \geqslant ١$

$\therefore$ مجال د(س) = [١ ، ∞[

$\because \sqrt{س - ١} \geqslant ٠$ لجميع قيم س الواقعة في مجال الدالة

$\therefore ٣ + \sqrt{س - ١} \geqslant ٣ \Leftarrow د(س) \geqslant ٣$

$\therefore$ مدى د(س) = [٣،∞ [

ب $\because ص = ٣ + \sqrt{س - ١}$

باستبدال المتغيرات س ، ص

$س = ٣ + \sqrt{ص - ١}$ $\quad س - ٣ = \sqrt{ص - ١}$ بتربيع الطرفين

$(س - ٣)^٢ = ص - ١$

$\therefore ص = (س - ٣)^٢ + ١$ $\quad \therefore د^{-١}(س) = (س - ٣)^٢ + ١$

مجال $د^{-١}(س)$ = [٣ ، ∞[ومداها [١ ، ∞ [

٩ حاول أن تحل

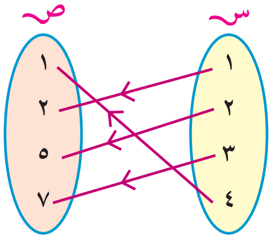
٣ إذا كانت د: ع$^{+}$ ⟵ ع بحيث د(س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$

أ أوجد د$^{-١}$(س) وعين مجالها ومداها

ب مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البياني لكل د(س) ، د$^{-١}$(س)

تمـــارين ٢ – ٤

١ أكمل:



أ إذا كانت الدالة د= {(١، ٤)، (٢، -٣)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن د$^{-١}$ = ...

ب الشكل المقابل يمثل دالة د: س ⟵ ص فإن د$^{-١}$ (٢) = ...

ج صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ....

د إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د$^{-١}$ (٦) = ...

ه إذا كان د: س ⟵ ٤س فإن د$^{-١}$: س ⟵ ....

٢ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (..........................)

ب الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (..........................)

ج الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..........................)

د الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..........................)

٣ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

ب د (س) = ٤س

ج د(س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

د د (س) = $\frac{٣}{س}$

ه د(س) = ٨ س^{٣} - ١

و د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

ز د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

ح د (س) = س^{٢} حيث س ⩾ صفر

ط د(س) = (س - ١)^{٢} + ٢ حيث س ⩾ ١

ى د(س) = س^{٢} + ٨ س + ٧ حيث س ⩾ -٤

ك د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث -٣ ⩽ س ⩽ ٠

ل د(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٣

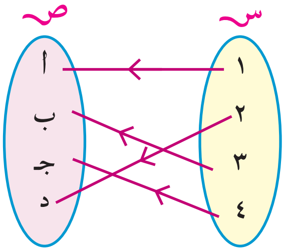
م د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

و

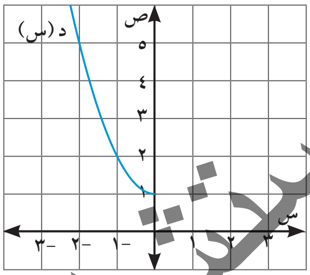
س	٢–	١	٢	٥
د(س)	٧	٤	١	١–

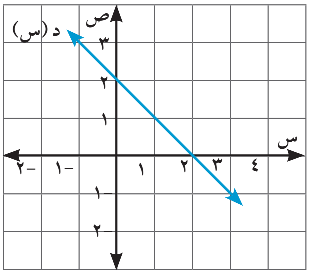
④ **أ** إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد $د^{-١}(س)$ ومثلهما بيانيًا.

ب الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ~ إلى صـ~ فأوجد قيمة $د^{-١}(ب) + ٢ د^{-١}(جـ)$.



⑤ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية $د^{-١}(س)$





⑥ **اكتشف الخطأ:**

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة $د(س) = \frac{س - ٥}{س}$

حل وائل

$∵ د(س) = \frac{س - ٥}{س}$

$∵ د^{-١}(س) = \frac{١}{د(س)}$

$∴ د^{-١}(س) = ١ ÷ \frac{س - ٥}{س}$

$= ١ × \frac{س}{س - ٥}$

$د^{-١}(س) = \frac{س - ٥}{س}$

حل رنا

$∵ ص = \frac{س - ٥}{س}$

$∴ س = \frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرات

$∴ ص س = ص - ٥$ بالضرب التبادلي

$∴ ص س - ص = -٥$

$∴ ص (س - ١) = -٥$

$∴ د^{-١}(س) = \frac{-٥}{س - ١}$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

⑦ **سؤال مفتوح:** هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية $د^{-١}$؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

⑧ في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

أ $د(س) = س^{٢}$

ب $د (س) = س^{٣}$

جـ $د(س) = \frac{١}{٢} س$

٢ - ٥

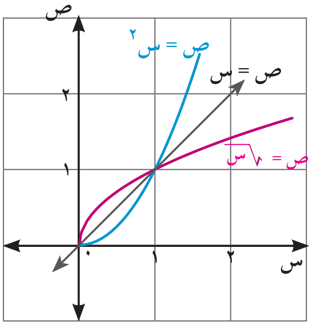
الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

Logarithmic Function and Its Graph

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية

استكشف

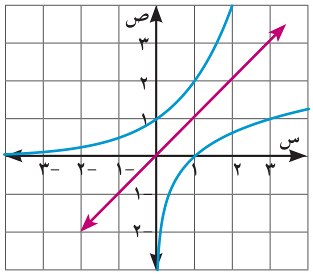


علمت أن الدالة ص = $\sqrt{س}$ هي الدالة العكسية للدالة ص = $س^{٢}$ لكل س ⩾ صفر (صورتها بالانعكاس في المستقيم ص = س)

فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية د حيث د(س) = $٢^{س}$ بيانيًّا من خلال تمثيل قيم س، ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

ص = $٢^{س}$	
س	ص
٣-	$\frac{١}{٨}$
٢-	$\frac{١}{٤}$
١-	$\frac{١}{٢}$
٠	١
١	٢
٢	٤
٣	٨

س = $٢^{ص}$	
س	ص
$\frac{١}{٨}$	٣-
$\frac{١}{٤}$	٢-
$\frac{١}{٢}$	١-
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣



نجد مما سبق أن معكوس ص = $٢^{س}$ هو س = $٢^{ص}$ ويسمى المتغير ص في المعادلة س = $٢^{ص}$ لوغاريتم س. ويكتب ص = $لو_{ا}$ س ويقرأ ص تساوي لوغاريتم س للأساس ا

تعلم

الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic Function*

إذا كان ا ∋ $ع^{+}$ - {١} فإن الدالة د حيث د: ع ⟵ $ع^{+}$ حيث د(س) = $لو_{ا}$ س هى الدالة العكسية للدالة ص = $ا^{س}$

وتسمى د(س) = $لو_{ا}$ س بالدالة اللوغاريتمية

- ⩽ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ع^{+}$ ⩽ مدى الدالة اللوغاريتمية = ع
- ⩽ الصورة ص = $لو_{ا}$ س تكافئ الصورة $ا^{ص}$ = س

سوف تتعلم

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

المصطلحات الأساسية

لوغاريتم	*Logarithm*
دالة عكسية	*Inverse Function*
مجال	*Domain*
اللوغاريتم المعتاد	*Common Logarithm*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

إرشادات للدراسة

تسمى $لو_{ا}$ س = ص بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $ا^{ص}$ = س بالصورة الأسية المكافئة لها.

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $٢^{٤} = ١٦$ تكافئ $\text{لو}_{٢}\ ١٦ = ٤$ ب $٥^{٢} = ٢٥$ تكافئ $\text{لو}_{٥}\ ٢٥ = ٢$

ج $(\frac{١}{٢})^{٤} = \frac{١}{١٦}$ تكافئ $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ \frac{١}{١٦} = ٤$ د $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ تكافئ $\text{لو}_{١٠}\ ٠,٠١ = -٢$

حاول أن تحل

① حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

أ $٧^{٢} = ٤٩$ ب $(\sqrt{٢})^{-١٠} = ٥١٢$ ج $(\frac{٣}{٥})^{٤} = \frac{٨١}{٦٢٥}$ د $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$

اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: $\text{لو}_{١٠}\ ٧$ تكتب لو٧ $\text{لو}_{١٠}\ ١٢٧$ تكتب لو١٢٧

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

أ $\text{لو}_{٣}\ ٨١ = ٤$ تكافئ $٣^{٤} = ٨١$ ب $\text{لو}_{٢}\ ١٢٨ = ٧$ تكافئ $٢^{٧} = ١٢٨$

ج $\text{لو}\ \frac{١}{١٠٠} = -٢$ تكافئ $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ د $\text{لو}_{٨١}\ ٢٧ = \frac{٣}{٤}$ تكافئ $٨١^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$

حاول أن تحل

② حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

أ $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$ ب $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ ج $\text{لو}_{٤}\ ١ = ٠$ د $\text{لو}\ ١٠٠٠ = ٣$

حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم:

مثال

① أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\text{لو}\ ٠,٠٠١$ ب $\text{لو}_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧}$

الحل

أ بوضع ص $= \text{لو}\ ٠,٠٠١$

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص $= -٣$ لذلك فإن $\text{لو}\ ٠,٠٠١ = -٣$

ب بوضع ص $= \text{لو}_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

ص $= \frac{٣}{٤}$

لذا فإن $\text{لو}_{٣}\ \sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

حاول أن تحل

③ أوجد قيمة كل من: أ $\text{لو}\ ٠,٠٠٠٠١$ ب $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ ١٢٨$

مثال

٢ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٣}$ (٢س - ٥) = ١   ب لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س > $\frac{٥}{٢}$ (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ ٣^{١} = ٢س - ٥   ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤ ∈ مجال تعريف المعادلة   ∴ مجموعة الحل هي {٤}

ب المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق { س + ٢ > صفر، س > صفر، س ≠ ١ } أي { س > -٢، س > صفر، س ≠ ١ }

أي]صفر، ∞[- {١} (مجال تعريف المعادلة)

وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة

∴ س^{٢} = س +٢   ∴ س^{٢} - س - ٢ = صفر

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر   ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المعادلة   ∴ مجموعة الحل = {٢}

٩ حاول أن تحل

٤ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

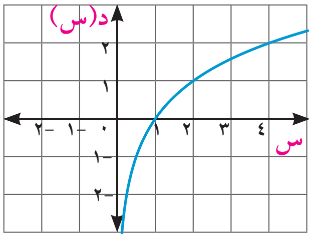
أ لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ب لو$_{س}$ ٥س = ٢

تعلم

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية: *Graphical Representation of the Logarithmic Function*

تمثل الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١



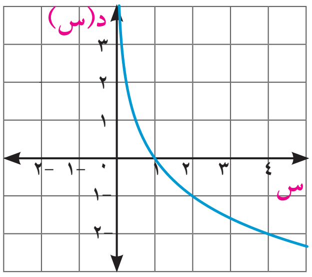
المجال: ح$^{+}$

المدى: ح

التقاطع مع محور س: (١، ٠)

التزايد والتناقص: تزايدية ح$^{+}$

عندما ٠ < أ < ١



المجال: $ع^{+}$

المدى: ع

التقاطع مع محور س: (١، ٠)

التزايد والتناقص: تناقصية على مجالها $ع^{+}$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

مثال

③ مثل الدوال الآتية بيانيًا:

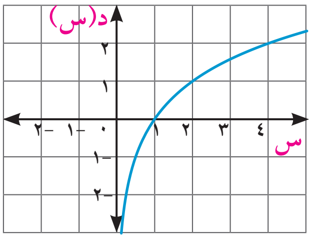
أ د(س) = $لو_{٢}$ س

ب د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

الحل

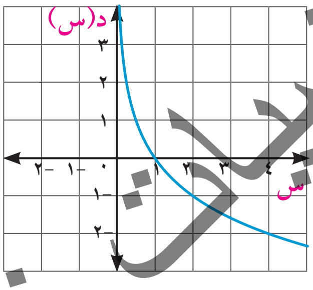
أ **لاحظ أن: الأساس** ٢ > ١

س	٢	١	٤
د(س)	١	٠	٢



ب **لاحظ أن:** الأساس: ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

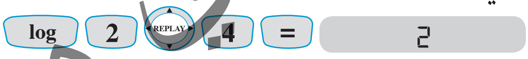
س	٢	١	٤
د(س)	١-	٠	٢-



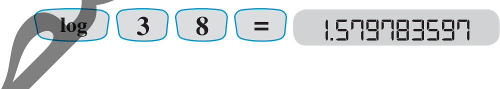
استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١) **لإيجاد** $لو_{٢}$ ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:



٢) **لإيجاد** لو ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية:



تدريب

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ $لو_{٣}$ ١٢

ب $لو_{٣}$ ٢٤

ب $لو_{\sqrt{٣}}$ $\frac{١}{٢٧}$

د لو ١٢٨

تمــارين ٢ – ٥

① عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

ب $(\frac{٢}{٥})^{٤} = \frac{١٦}{٦٢٥}$

ج $٥^{\text{صفر}} = ١$

د $(\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

② عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ $\text{لو}\ ١٠٠ = ٢$

ب $\text{لو}_{٢}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$

ج $\text{لو}_{٧}\ ١ = \text{صفر}$

د $\text{لو}_{\sqrt{١١}}\ ١٢١ = ٤$

③ عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{٣}\ (٢\text{س}+١)$

ب $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{لو}\text{س}$

ج $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{(٥-\text{س})}\ (\text{س}-٣)$

④ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ $\text{لو}_{٢}\ ١٦$

ب $\text{لو}_{\sqrt{٥}}\ ٥$

ج $\text{لو}_{٨}\ ١$

د $\text{لو}_{٣}\ ٣\sqrt{٣}$

⑤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $\text{لو}_{٣}\ ٢٧ = \text{س} + ٢$

ب $\text{لو}_{\text{س}}\ (٢\text{س} + ٣) = ٢$

ج $\text{لو}\ (٢\text{س} + ١) = \text{صفر}$

د $\text{لو}_{٢}\ (\text{لو}_{٣}\ \text{س}) = ١$

هـ $\text{لو}_{٤}\ [١٣ + \text{لو}_{٢}\ (\text{س}-١)] = ٢$

و $\text{لو}_{٢}\ (٤^{\text{س}} - ٢) = \text{س}$

⑥ مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

أ $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{٣}\ \text{س}$

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
د(س)					

ب $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ (\text{س}+١)$

س	$-\frac{٧}{٨}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١	٣	٧
د(س)						

⑦ ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $\text{ر}(\text{س}) = \text{لو}_{٢}\ \text{س}$، $\text{د}(\text{س}) = ٦ - \text{س}$، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٦-\text{س}$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑧ إذا كان $\text{لو}_{٣}\ \text{س} = ٢$ فإن س = ...

أ ٩

ب ٨

ج ٣

د ٥

⑨ إذا كان $\text{لو}_{\text{أ}}\ ١٦ = ٤$ فإن أ ∋ ....

أ {١٦}

ب {٢}

ج {٢، -٢}

د {١}

⑩ $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ =$ ....

أ $\sqrt{٣}$

ب ٣

ج ٥

د ١٢٥

⑪ مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو ....

أ]-∞، ٠[∪]٠، ١[　　ب]-∞، ١[　　ج]١، ∞[　　د]-١، ١[

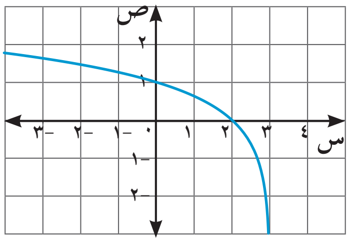
⑫ لو ١٠٠ = ...

أ ١　　ب ٢　　ج ٣　　د -١

⑬ إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ...

أ ١　　ب ٢　　ج $\frac{١}{٤}$　　د -٢

⑭ الشكل المقابل يمثل الدالة ....



أ ص = $٣^{س-١}$　　ب ص = $٣^{س+١}$

ج ص = لو$_{٣}$ (٢-س)　　د ص = لو$_{٣}$ (٣-س)

⑮ أوجد قيمة كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

أ لو$_{٣}$ ٨١　　ب لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$　　ج لو$_{\sqrt{٧}}$ ٣٤٣　　د لو ٠,٠٠١

⑯ أوجد قيمة كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

أ لو$_{٨١}$ = $\frac{٣}{٤}$　　ب لو$_{٣}$ (٢ س - ٥) = ٠　　ج لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢

د لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ س = ٠　　هـ لو$_{٣}$ ($\frac{س^{٢}}{٢س-٣}$) = ١　　و لو$_{٥}$ |$٢^{س}$ +١| = ١

⑰ **الربط بالتعليم:** إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (ن) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(ن) = ٧٠ - ٤ لو$_{٢}$ (ن + ١)

فأوجد درجات هذا الطالب:

أولًا: في نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠)

ثانيًا: بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى.

⑱ **تطبيقات:** في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(ن) = ٨٥ - ٢٥لو(ن + ١) حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

٢ - ٦

بعض خواص اللوغاريتمات

Some Properties of Logarithms

سوف تتعلم

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

المصطلحات الأساسية

- معادلة لوغاريتمية. *Logarithmic Equations*
- مقياس ريختر. *Richter Scale*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

١) (لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ٨) ، لو$_{٢}$ ٣٢ **٢)** (لو ٤٠ + لو$\frac{٥}{٢}$) ، لو ١٠٠

٣) (لو$_{٣}$ ٢٧ - لو$_{٣}$ ٩)، لو$_{٣}$ ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟

تعلم

بعض خواص اللوغاريتمات *Some Properties of Logarithms*

إذا كان ؛ فإن: أ $\in$ ع$^{+}$ - {١} **١)** لو$_{أ}$ أ = ١ **٢)** لو$_{أ}$ ١ = صفر

حاول إثبات كل من **١** ، **٢** من تعريف اللوغاريتم.

٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص حيث س، ص $\in$ ع$^{+}$

لإثبات صحة هذه الخاصية:

ضع ب = لو$_{أ}$ س ، جـ = لو$_{أ}$ ص

ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:

س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

فتكون س ص = أ^{ب} × أ^{جـ} **أي أن** س ص = أ$^{ب + جـ}$

وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون: لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ

وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

مثال

① أوجد قيمة لو$_{٢}$ ١٠ في أبسط صورة إذا كان لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

لو$_{٢}$ ١٠ = لو$_{٢}$ (٢ × ٥)

= لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ ٥ **باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات**

= ١ + ٢,٣٢١٩ ≃ ٣,٣٢١٩ **باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩**

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

log 2 ◄REPLAY► 1 0 = 3,321928095

حاول أن تحل

① أوجد قيمة $\text{لو}_{٣}\,١٥$ في أبسط صورة إذا كان $\text{لو}_{٣}\,٥ \simeq ١,٤٦٥$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$\text{لو}_{أ}\,\frac{س}{ص} = \text{لو}_{أ}\,س - \text{لو}_{أ}\,ص$ حيث س، ص $\in$ $ع^{+}$ **(حاول أن تثبت صحة العلاقة)**

مثال

② أوجد قيمة المقدار: لو ٣٠ - لو ٣ .

الحل

$\text{لو}\,٣٠ - \text{لو}\,٣ = \text{لو}\,\frac{٣٠}{٣} = \text{لو}\,١٠ = ١$

حاول أن تحل

② أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو٢ = ١ - لو٥

٥) خاصية لوغاريتم القوة:

$\text{لو}_{أ}\,س^{ن} = ن\,\text{لو}_{أ}\,س$ **حيث** ن $\in$ ع ، س > ٠ ، أ $\in$ $ع^{+}$ ، أ $\neq ١$

مثال

③ أوجد فى أبسط صورة $\text{لو}_{٥}\,\sqrt[٤]{١٢٥}$

الحل

$\text{لو}_{٥}\,\sqrt[٤]{١٢٥} = \text{لو}_{٥}\,(٥)^{\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٤}\text{لو}_{٥}\,٥ = \frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$

لاحظ أن

$(\sqrt[٤]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٥^{٣}} = ٥^{\frac{٣}{٤}})$

حاول أن تحل

③ ضع في أبسط صورة

$\text{لو}_{٣}\,\sqrt[٧]{٢٤٣}$ ، $\text{لو}_{٧}\,\sqrt[٤]{٣٤٣}$

لاحظ أن: $\text{لو}_{أ}\,(\frac{١}{س}) = -\,\text{لو}_{أ}\,س$ حيث س $\in$ $ع^{+}$

٦) خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س $\in$ $ع_{+}$ ، ص ، أ $\in$ $ع^{+}$ - {١} ، أثبت أن: $\text{لو}_{ص}\,س = \frac{\text{لو}_{أ}\,س}{\text{لو}_{أ}\,ص}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: ع = لو$_{ص}$ س

ص^{ع} = س — بالتحويل إلى الصورة الأسية

ع لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س — يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

فتكون ع = $\frac{\text{لو}_{أ}\ س}{\text{لو}_{أ}\ ص}$ — أي أن: لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{أ}\ س}{\text{لو}_{أ}\ ص}$

؟ حاول أن تحل

④ استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: **أ** لو$_{٤}$ ٨ **ب** لو$_{٩}$ ٢٤٣

٧- خاصية المعكوس الضربي: لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\ أ}$

تفكير ناقد: إذا كانت أ، ب ∋ ع$^{+}$ - {١} فأثبت أن لو$_{أ}$ ب = $\frac{١}{\text{لو}_{ب}\ أ}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: لو$_{٣}$ ٧ × لو$_{٧}$ ٣ في أبسط صورة.

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

④ اختصر لأبسط صورة:

أ ٢لو٢٥ + لو($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٥}$) + ٢لو٣ - لو٣٠

ب لو$_{٥}$ ٤٩ × لو$_{٨}$ ٥ × لو$_{٩}$ ٨ × لو$_{٧}$ ٩

الحل

أ المقدار = لو ٢٥^{٢} + لو$\frac{٨}{١٥}$ + لو٣^{٢} - لو٣٠ — خاصية ٥

= لو (٢٥^{٢} × $\frac{٨}{١٥}$ × ٣^{٢} × $\frac{١}{٣٠}$) — خاصية ٣، ٤

= لو١٠٠ = ٢

ب المقدار = $\frac{\text{لو٤٩}}{\text{لو٥}}$ × $\frac{\text{لو٥}}{\text{لو٨}}$ × $\frac{\text{لو٨}}{\text{لو٩}}$ × $\frac{\text{لو٩}}{\text{لو٧}}$ — خاصية ٦

= $\frac{\text{لو٤٩}}{\text{لو٧}}$ = $\frac{\text{٢لو٧}}{\text{لو٧}}$ = ٢

؟ حاول أن تحل

⑤ اختصر: لو٠,٠٠٩ - لو$\frac{٢٧}{١٦}$ + لو$\frac{٥}{٨}$١٥ - لو$\frac{١}{١٢}$

⑥ أثبت أن: $\frac{\text{لو٧٢٩ - لو٦٤}}{\text{لو٩ - لو٤}}$ = ٣

⑦ إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٨س ص، أثبت أن: ٢لو(س + ص) = ١ + لوس + لوص

حل المعادلات اللوغاريتمية *Solving Logarithmic Equations*

مثال

٥ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

ب لو$_{٣}$ س + لو$_{س}$ ٣ = ٢

الحل

أ المعادلة معرفة لكل س ∋ {س:س - ١ > صفر} ∩ {س:س + ١ > صفر}

أي س > ١ (مجال تعريف المعادلة)

لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ لو$_{٣}$ (س - ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨ **خاصية ٣**

∴ س^{٢} - ١ = ٨ ∴ س^{٢} = ٩ ومنها س = ±٣

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المعادلة ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لكل س > صفر ، س ≠ ١

∴ لو$_{٣}$ س + $\frac{١}{\text{لو}_{٣}\text{ س}}$ = ٢ **خاصية ٧**

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١ = ٢لو$_{٣}$ س **بالضرب في لو$_{٣}$ س**

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} - ٢لو$_{٣}$ س + ١ = صفر ∴ (لو$_{٣}$ س - ١)^{٢} = صفر

∴ لو$_{٣}$ س = ١ ∴ س = ٣∋ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٣}

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ع:

أ لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ (س + ٢) = ١

ب لو(٨ - س) + ٢لو$\sqrt{\text{س - ٦}}$ = ٠

ج لوس - لو$_{س}$ ١٠٠ = ١

حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات *Solving Exponential Equations Using Logarithms*

مثال **استخدام الآلة الحاسبة فى حل المعادلات اللوغاريتمية**

٦ أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ ٢$^{\text{س+١}}$ = ٥

ب ٥$^{\text{س-٢}}$ = ٣ × ٤$^{\text{س+١}}$

الحل

أ ٢$^{\text{س+١}}$ = ٥ **يأخذ اللوغاريتم للطرفين**

∴ لو٢$^{\text{س+١}}$ = لو٥ ∴ (س + ١) لو٢ = لو٥

∴ $\text{س} + ١ = \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٢}$ أي أن: $\text{س} = \frac{\text{لو}٥}{\text{لو}٢} - ١$ ∴ $\text{س} \simeq ١,٣٢$

استخدام الآلة الحاسبة:

log 5) ÷ log 2) - 1 = 1,321928095

ب $٥^{\text{س}-٢} = ٣ \times ٤^{\text{س}+١}$ **بأخذ لوغاريتم للطرفين**

∴ $\text{لو}٥^{\text{س}-٢} = \text{لو}(٣ \times ٤^{\text{س}+١})$ ∴ $\text{لو}٥^{\text{س}-٢} = \text{لو}٣ + \text{لو}٤^{\text{س}+١}$

∴ $(\text{س} - ٢)\ \text{لو}٥ = \text{لو}٣ + (\text{س} + ١)\ \text{لو}٤$ ∴ $\text{س لو}٥ - ٢\text{لو}٥ = \text{لو}٣ + \text{س لو}٤ + \text{لو}٤$

∴ $\text{س لو}٥ - \text{س لو}٤ = \text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥$ ∴ $\text{س}\ (\text{لو}٥ - \text{لو}٤) = \text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥$

∴ $\text{س} = \frac{\text{لو}٣ + \text{لو}٤ + ٢\text{لو}٥}{\text{لو}٥ - \text{لو}٤} \simeq ٢٥,٥٦$

استخدم الآلة الحاسبة:

log 3) + log 4) + 2 log 5) = ÷ (log (5)

- log 4 = 25,56104553

٩ حاول أن تحل

⑨ أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

أ $٣^{٧-٢\text{س}} = ١٣,٤$ **ب** $٧^{\text{س}-٢} = ٤^{\text{س}+٣}$

مثال

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

⑦ **الربط بالجيولوجيا:** إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة $\text{د} = \text{لو}\left(\frac{\text{ش}}{\text{ش}_٠}\right)$، حيث ش هي شدة الزلزال، ش٠ الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفري لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل $١٠^٦$ مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ ∵ $\text{د} = \text{لو}\left(\frac{\text{ش}}{\text{ش}_٠}\right)$ ، $\text{ش} = ١٠^٦\ \text{ش}_٠$ ∴ $\text{د} = \text{لو}\left(\frac{١٠^٦\ \text{ش}_٠}{\text{ش}_٠}\right) = \text{لو}\ ١٠^٦ = ٦\ \text{لو}\ ١٠ = ٦$

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب ∵ درجة الزلزال = ٧,١

∴ $٧,١ = \text{لو}\left(\frac{\text{ش}}{\text{ش}_٠}\right)$ ∴ $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_٠} = ١٠^{٧,١}$ فتكون $\text{ش} = ١٠^{٧,١}\ \text{ش}_٠$.

أي أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

حاول أن تحل

⑩ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة $\text{ع} = ١٠^{٥}\ (١,٣)^{\text{ن}-٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.

تمارين ٢ – ٦

① بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ $\text{لو}\ ١٠٠٠$ ب $\text{لو}_{٢}\ ٣٢$ جـ $\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\ ١٦$ د $\text{لو}_{٧}\ ٤٩$

هـ $\text{لو}\ ٠,٠٠١$ و $\text{لو}_{٨}\ ٢$ ز $\text{لو}_{٨}\ ١$ ح $\text{لو}_{\text{ص}}\ \sqrt{\text{ص}}$

② اختصر لأبسط صورة

أ $\text{لو}٢ + \text{لو}٥$ ب $\text{لو}_{٥}\ ١٥ - \text{لو}_{٥}\ ٣$ جـ $\dfrac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}٥}$

د $\text{لو}_{٢}\ ٥ \wedge \text{لو}_{٥}\ ٢$ هـ $\text{لو}٥٤ - ٣\ \text{لو}٣ - \text{لو}٢$ و $١ + \text{لو}٣ - \text{لو}٢ - \text{لو}١٥$

ز $\text{لو}_{\text{ا ب جـ}}\ \text{ا} + \text{لو}_{\text{ا ب جـ}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{ا ب جـ}}\ \text{جـ}$ ح $\dfrac{١}{\text{لو}_{٢}\ ١٢} + \dfrac{١}{\text{لو}_{٨}\ ١٢} + \dfrac{١}{\text{لو}_{٩}\ ١٢}$

③ علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∋ ع$^{+}$ ، ا، ب ∋ ع$^{+}$ - {١}:

أ $\text{لو}_{\text{ا}}(\text{س} + \text{ص}) = \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س} + \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}$ ( )

ب $\text{لو}_{\text{ا}}(\text{س} + \text{ص}) = \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س} \times \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}$ ( )

جـ $\text{لو}_{\text{ا}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س} + \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}$ ( )

د $\text{لو}٢\text{س}^{٥} = ٥\text{لو}٢\text{س}$ ( )

هـ $\text{لو}_{\text{ا}}(\frac{\text{س}}{\text{ص}}) = \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س} + \text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}^{-١}$ ( )

و $\dfrac{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{ص}} = \dfrac{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{ص}}$ ( )

ز إذا كان س > صفر فإن $\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س}^{٤} = ٤\text{لو}_{\text{ا}}\ \text{س}$ ( )

④ إذا كان $\text{لو}٢ = \text{س}^{٨}$، $\text{لو}٣ = \text{ص}$ أوجد بدلالة س ، ص كل من: $\text{لو}٦$ ، $\text{لو}_{١٨}\ ١٢$

⑤ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

أ $٧^{٣\text{س}-٢} = ٥$ ب $٧^{\text{س}+١} = ٣^{\text{س}-٢}$ جـ $\dfrac{٥}{١٠^{٢\text{س}}} = ٧$ د $\text{س}^{\text{لو س}} = ١٠٠\ \text{س}$

⑥ أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٤}$ س = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣) ب لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س ج لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

د (لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣ ه (لو س)^{٣} = لو س^{٩} و ٣$^{\text{لو س}}$ = ٢$^{\text{لو ٣}}$

ز لو$_{٣}$ س = لو$_{س}$ ٣ ح لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢ ط لو$_{٢}$ (٢^{س} - ٤) + س - ٥ = صفر

⑦ استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:

أ لو ٣,١٥ ب لو$_{٢}$ ٢٥ ج ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧ د $\frac{٣^{١٥٠} \times ٥^{٢٠٠}}{٧^{٢٥٠}}$

⑧ استخدم الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد ٤^{٤٧}

⑨ الربط بالكيمياء: يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين فى المحلول (H^{+}) أى أن: $PH = -\log (H^{+})$

أ احسب الرقم الهيدروجينى لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10^{-3}

ب احسب تركيز الهيدروجين فى محلول رقمه الهيدروجينى 9

⑩ الربط بالسكان: إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪

أ أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

ب بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

⑪ إذا كان س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة لو ($\frac{١}{س}$ + س)

⑫ اكتشف الخطأ: قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر: لو س^{٣} + لو ص^{٤} - لو س ص^{٢}

حل أميرة

المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص

= لو س + ٢ لو ص

حل إسراء

المقدار = لو $\frac{س^{٣} \times ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = لو س^{٢} ص^{٢}

= لو (س ص)^{٢} = ٢ لو س ص

= ٢ (لو س + لو ص)

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

⑬ تفكير ابداعى: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°)

ملخص الوحدة

١) الأسس الصحيحة

أ $ا^{ن} = ا \times ا \times ا \times \quad \times ا$ (العامل ا مكرر ن من المرات)

ب $ا^{٠} = ١$ حيث $ا \in ع - \{٠\}$ **ج** $ا^{-١} = \frac{١}{ا}$ ، $ا^{-ن} = \frac{١}{ا^{ن}}$ حيث $ا \neq ٠$

خواص الأسس الصحيحة لكل م ، ن ∈ ص ، ا ، ب ∈ ع - {٠} ، فإن:

أ $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$ **ب** $(اب)^{ن} = ا^{ن} ب^{ن}$ **ج** $\frac{ا^{م}}{م^{ن}} = ا^{م-ن}$

د $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{ن} = \frac{ا^{م}}{م^{ن}}$ **هـ** $(ا^{م})^{ن} = ا^{من}$

٢) الجذور النونية

المعادلة $س^{ن} = ا$ حيث $ا \in ع$، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

أ ن عدد زوجى ، $ا \in ع^{+}$

يوجد جذران حقيقيان (باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)، أحدهما موجب والآخر سالب، ويسمى الجذر الموجب بالجذر الأساسى، ويرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{ا}$

ب ن عدد زوجى ، $ا \in ع^{-}$ ليس للمعادلة جذور حقيقية (جميع الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)

ج ن فردى ، $ا \in ع$

يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد (باقى الجذور أعداد مركبةغير حقيقية)، ويسمى هذا الجذر بالجذر الأساسى

د $ن \in ص^{+}$، ا = صفر

يوجد للمعادلة حل وحيد هو الصفر (لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر).

٣) خواص الجذور النونية:

إذا كان $\sqrt[ن]{ا}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$ فإن:

أ $\sqrt[ن]{اب} = \sqrt[ن]{ا} \times \sqrt[ن]{ب}$ **ب** $\sqrt[ن]{\frac{ا}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{ا}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، $ب \neq ٠$

ج $\sqrt[ن]{ا^{م}} = (\sqrt[ن]{ا})^{م} = ا^{\frac{م}{ن}}$ **د** $\sqrt[ن]{ا^{ن}} = ا$ إذا كان ن فردى $= |ا|$ إذا كان ن زوجى

٤) الأسس الكسرية

$ا^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{ا}$ حيث $\sqrt[ن]{ا} \in ع$

٥) خواص الأسس الكسرية

أ لأى عدد حقيقي $ا \geq ٠$، $ن \in ص^{+} - \{١\}$ يكون $ا^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{ا}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما $ا < ٠$ ، ن عدد صحيح فردى أكبر من ١

ب على ذلك يكون $ا^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{ا})^{م} = \sqrt[ن]{ا^{م}}$ حيث $ا \in ع$، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، $ن > ١$، $\sqrt[ن]{ا} \in ع$

٦) الدالة الأسية:

إذا كانت $د : ع \longrightarrow ع^{+}$ حيث $د(س) = ا^{س}$ لكل $ا \in ع^{+} - \{١\}$ فإن د تسمى دالة أسية أساسها ا

٧) خواص منحنى الدالة الأسية

أ مجال الدالة = ع   ب المدى ع$^{+}$

جـ الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسى معامله أ.

د الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أ<١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسى معامله أ.

٨) المعادلة الأسية:

إذا كان أ$^{\text{ن}}$ = أ$^{\text{م}}$ حيث أ $\not\in$ {٠، ١، -١} فإن م = ن

إذا كان أ$^{\text{ن}}$ = ب$^{\text{ن}}$ حيث أ ، ب $\not\in$ {٠، ١، -١} فإن

إما ن = صفر **أو** أ = ب فى حالة ن عدد فردى **أو** أ = | ب | فى حالة ن عدد زوجى

٩) الدالة العكسية إذا كانت دالة أحادية من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة د$^{-1}$ من ص إلى س تسمى دالة عكسية للدالة د إذا كان لكل (س ، ص) $\in$ د فإن (ص ، س)$\in$ د$^{-1}$

١٠) منحنى الدالة د$^{-1}$ هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س .

١١) لكي يكون للدالة د دالة عكسية يجب أن تكون د دالة أحادية أي يحقق منحنى د اختبار الخط الأفقي (إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية).

- يقال إن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س)= س ، (ر ∘ د) (س) = س
- مجال الدالة د(س) هو مدى الدالة العكسية د$^{-1}$(س)
- ومدى الدالة د(س) هو مجال الدالة العكسية د$^{-1}$(س)

١٢) الدالة اللوغاريتمية

أ إذا كانت أ $\in$ ع$^{+}$ - {١} فإن الدالة ص = لو$_{\text{أ}}$ س هى الدالة العكسية للدالة الأسية ص = أ$^{\text{س}}$

ب أ$^{\text{ب}}$ = جـ فإن ب = لو$_{\text{أ}}$ جـ (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).

جـ اللوغاريتم المعتاد: هو لوغاريتم اساسه ١٠ {لاحظ أن لو ٥ = لو$_{\text{١٠}}$ ٥}

١٣) خواص الدالة اللوغاريتمية

أ مجال الدالة =ع$^{+}$ ب المدى = ع

جـ الدالة ص= لو$_{\text{أ}}$ س متزايدة لكل أ> ١ ومنتناقصة لكل ٠ < أ < ١

١٤) خواص اللوغاريتمات: إذا كانت أ$\in$ع$^{+}$ - {١}

أ لو$_{\text{أ}}$ أ = ١   ب لو$_{\text{أ}}$ ١ = صفر   جـ لو$_{\text{أ}}$ س$^{\text{م}}$ = م لو$_{\text{أ}}$ س   حيث   س > صفر

د لو$_{\text{أ}}$ س + لو$_{\text{أ}}$ ص = لو$_{\text{أ}}$ س ص حيث س، ص > صفر

هـ لو$_{\text{أ}}$ س - لو$_{\text{أ}}$ ص = لو$_{\text{أ}}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ حيث س، ص > صفر

و لو$_{\text{أ}}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ}}$ حيث س > صفر ، أ، ب $\in$ ع$^{+}$ - {١}   ز لو$_{\text{أ}}$ س × لو$_{\text{س}}$ أ =١

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

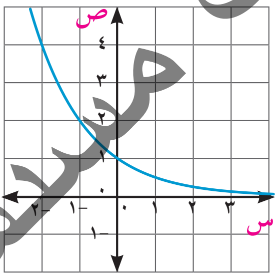
تمارين عامة

① اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

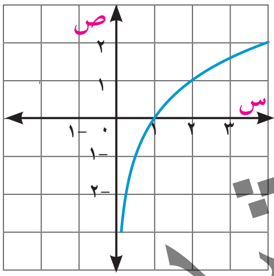
أ إذا كان $٣^{س} = ٥$ فإن س =

(أ) ٢ (ب) $لو_{٣}\ ٥$ (ج) $لو_{٥}\ ٣$ (د) $\frac{٥}{٣}$

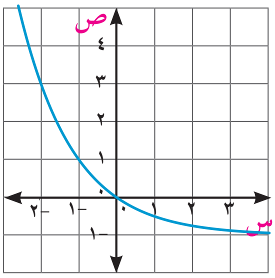
ب الدالة د حيث $د(س) = ٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى



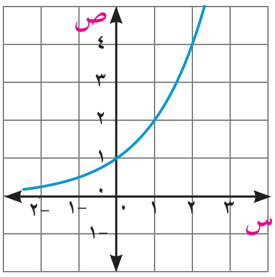
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

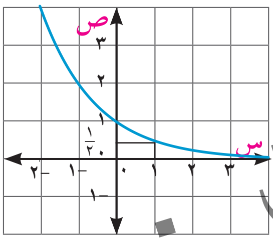
ج $لو_{\sqrt{٣}}\ ٨١ =$

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ٤- (د) $\frac{٣٢}{٣}$

د $\frac{ا^{س+٢} + ا^{س+١} + ا^{س}}{ا^{س+١} + ا^{س} + ا^{س-١}} =$

(أ) ا (ب) ا-١ (ج) اس (د) ١

ه الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث



(أ) $د(س) = ٢^{س+١}$ (ب) $د(س) = ٢^{-س}$

(ج) $د(س) = ٣^{-س}$ (د) $د(س) = ٢^{س}$

و أى مما يأتى يكافئ $\frac{٢\ لو\ ٧}{لو\ ٧ + لو\ ٦}$ ؟

(أ) $\frac{لو\ ٧}{لو\ ٦}$ (ب) $\frac{لو\ ٤٩}{لو\ ٤٢}$ (ج) $\frac{٢}{لو\ ٦}$ (د) لو $\frac{٧}{٦}$

ز إذا كان $لو_{٢}\ (س - ٤) = ٤$ فإن س =

(أ) ٤ (ب) ٢٠ (ج) ١٦ (د) ١٨

ح لو ٠,٠١ =

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ١- (د) ٢-

ط إذا كان منحنى ص = $لو_{٤}\ (١ - اس)$ يمر بالنقطة $(\frac{١}{٤}، -\frac{١}{٢})$ فإن ا =

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٨

② أوجد مجموعة حل المعادلات

أ $٥^{س-٢} = \frac{١}{١٢٥}$

ب $(\sqrt{٣})^{س-٤} = ١$

ج $٧^{س-٢} = ٥^{س-٢}$

د $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

هـ $س^{لوس} = ١٠$

و $\sqrt{لو_{٢}\, س} = لو_{٢}\, \sqrt{س}$

ز $لو_{٢}\, س + لو_{٤}\, س = -\frac{٣}{٢}$

ح $لو\, (س + ٣) - لو\, (س + ٢) = ١$

③ أكمل ما يأتى:

أ إذا كان $٢^{س} = ٥$ فإن $٤^{س} =$ ....

ب مجال الدالة د حيث $د(س) = ٣^{س}$ هو .... ومداها هو ....

ج مجال الدالة د حيث $د(س) = لو_{٢}\, س$ هو .... ومداها هو ....

د $لو_{٣}\, ٥ \times لو_{٥}\, ٣ =$ ....

هـ منحنى الدالة $ص = لو_{٢}\, (٣ - س)$ يقطع محور السينات فى النقطة ....

و إذا كان $لو_{٣}\, س = ٤$ فإن $س =$ ....

④ أكمل الجدول التالى مستخدمًا الحقيقة $ص = لو_{ب}\, س$ تكافئ $ب^{ص} = س$

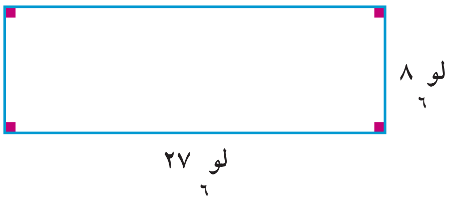
الصورة الاسية	الصورة اللوغاريتمية
$٢^{٥} = ٣٢$	....
....	$لو_{٣}\, ٨١ = ٤$
$س = ص^{ع}$	....
....	$لو_{١٠} = ١$
$١٦^{\frac{١}{٤}} = ٢$	....
....	$لو_{\frac{١}{٥}}\, ٢٥ = -٢$

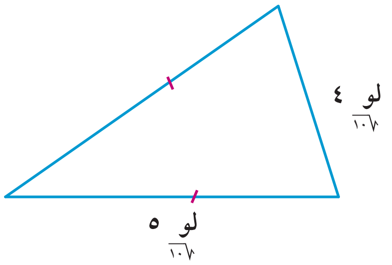
⑤ مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال

أ $د(س) = (\frac{٣}{٢})^{س}$

ب $د(س) = لو_{٢}\, (س + ١)$

⑥ أوجد محيط كل من الأشكال الآتية فى أبسط صورة:





اختبار تراكمى

① أوجد قيمة كل من:

أ $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ب $\sqrt[٤]{١٦^{-٣}}$ ج $\text{لو}_{٠{,}٠٩}\,(٠{,}٣)^{-٢}$

② اختصر لأبسط صورة:

أ $\dfrac{٥^{٢س} \times ٤^{س}}{١٠^{٢س-١}}$ ب $\dfrac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$ ج $\text{لو}_{٦}\,٤ + ٢\,\text{لو}_{٦}\,٣$

③ أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ $٢^{س} = ١٠$ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى. ب $\text{لو}_{٥}\,س + \text{لو}_{٥}\,٣ = ٢$

ج $٢^{س} - ٢^{س+١} + ٢^{س-١} = -١$ د $س^{\frac{١٠}{٣}} - ٣٣س^{\frac{٥}{٣}} + ٣٢ = \text{صفر}$

④ اختر الإجابة الصحيحة:

أ العدد $٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$ يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

ب إذا كان لو(س + ١١) = ٢ فإن س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

ج مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

د $\text{لو}\,(\text{حتا}\,\theta) + \text{لو}\,(\text{قا}\,\theta) = $ .... حيث $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) ا (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

⑤ إذا كان $\text{لو}(س + ص) = \frac{١}{٢}\,(\text{لو}\,س + \text{لو}\,ص) + \text{لو}\,٢$ أثبت أن س = ص.

⑥ الربط بالفيزياء: يعطى الزمن الدورى للبندول بالعلاقة $ن = ٢\pi\sqrt{\frac{ل}{ء}}$، حيث ن الزمن بالثوانى، ل طول البندول بالسم، ء عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^{٢}

أ أوجد الزمن لبندول كبير طوله ٧٣سم.

ب يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من ١٠ ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

⑦ الربط بالجيولوجيا: تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس رختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة: م = لوس، حيث س سعة الموجة التى تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت ١٠ درجات على مقياس رختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت ٧ درجات على نفس المقياس.

الوحدة
الثالثة

النهايات والاتصال
Limits and Continuity

مقدمة الوحدة

ظهرت أولى أفكار حساب التفاضل والتكامل في أعمال الرياضي الإغريقي أرشميدس Archimedes ، الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل: حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدمًا في ذلك طرقًا كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة في التكامل، وفي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين شُغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل حتى قام كل من الإنجليزي نيوتن Newton والألماني لايبنز Leibnitz كل على حدة باكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

والتفاضل والتكامل أو الحسبان Calculus هو أحد فروع الرياضيات التى تدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدالة وتحليلها ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيرًا ما يحتاج لدراسة سلوك الدالة والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ ما فيها من أنشطة يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مقدمة في النهايات.
- يتعرف بعض الكميات غير المعنية مثل: $\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$ ، ...
- يحدد طريقة إيجاد نهاية دالة:

  بالتعويض المباشر، بالتحليل، بالقسمة المطولة، بالضرب في المرافق.
- يوجد نهاية دالة مستخدمًا القانون $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١}$
- يستنتج نهاية دالة مستخدمًا القانون $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$
- يوجد نهاية دالة عند اللانهاية.
- يوجد نهايات بعض الدوال المثلثية.
- يستخدم الحاسبات البيانية للتحقق من صحة نهاية دالة وتقدير قيمة النهاية في صورة نشاط.
- يتعرف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند نقطة يختلف حولها تعريف الدالة.
- يتعرف مفهوم اتصال الدالة:

  اتصال دالة عند نقطة - اتصال دالة على فترة - إعادة تعريف بعض الدوال غير المتصلة لتصبح متصلة.
- يتعرف تطبيقات (تمارين وأنشطة) متنوعة على المفاهيم الأساسية لنهايات الدوال واتصالها.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	Unspecified Quantity	دالة كثيرة الحدود	Polynomial Function
غير معرف	Undefined	نهاية الدالة عند اللانهاية	Limit of a Function at Infinity
نهاية يمنى	Right Limit	دالة مثلثية	Trigonometric Function
نهاية يسرى	Left Limit	نهاية دالة مثلثية	Limit of a Trigonometric Function
نهاية دالة	Limit of a Function	اتصال دالة	Continuity of a Function
تعويض مباشر	Direct Substitution		

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): مقدمة فى النهايات.

الدرس (٣ - ٢): إيجاد نهاية الدالة جبريًّا.

الدرس (٣ - ٣): نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس (٣ - ٤): نهايات الدوال المثلثية.

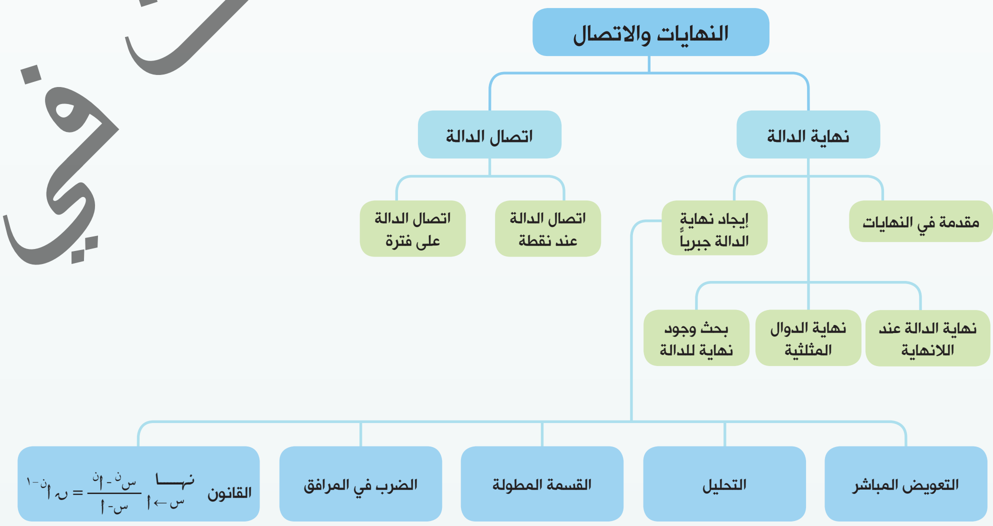
الدرس (٣ - ٥): بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

الدرس (٣ - ٦): الاتصال.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسب آلى - برامج رسومية

مخطط تنظيمى للوحدة


النهايات والاتصال
نهاية الدالة
اتصال الدالة
مقدمة في النهايات
إيجاد نهاية الدالة جبرياً
اتصال الدالة عند نقطة
اتصال الدالة على فترة
نهاية الدالة عند اللانهاية
نهاية الدوال المثلثية
بحث وجود نهاية للدالة
التعويض المباشر
التحليل
القسمة المطولة
الضرب في المرافق
القانون $\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١}$

الوحدة الثالثة

٣ - ١

مقدمة في النهايات

Introduction to Limits of Functions

فكر و ناقش

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البيانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

① ٣×٥ ② $٢٨ \div ٤$ ③ $٤ - ٩$

④ $٧ \div ٠$ ⑤ $٠ \div ٠$ ⑥ $\infty + ٣$

⑦ $\infty \div \infty$ ⑧ $\infty - \infty$

تذكر أن

∞ هى رمز يدل على كمية غير محددة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

الكميات غير المعينة: *Unspecified Quantities*

تعلم

فى بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

لاحظ أن: $٧ \div ٠$ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لامعنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية $٠ \div ٠$

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$ **(لماذا؟)**

أضف إلى معلوماتك

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، − ∞ كالآتى:

لكل $أ \in ع$ فإن:

١- $\infty + أ = \infty$

٢- $-\infty + أ = -\infty$

٣- $\infty \times أ = \begin{cases} \infty & \text{، إذا كان } أ > ٠ \\ -\infty & \text{، إذا كان } أ < ٠ \end{cases}$

٤- $-\infty \times أ = \begin{cases} \infty & \text{، إذا كان } أ < ٠ \\ -\infty & \text{، إذا كان } أ > ٠ \end{cases}$

سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

المصطلحات الأساسية

كمية غير معينة	Unspecified Quantities
غير معرف	Undefine
مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة	Extended Real Numbers
نهاية يمنى	Right Limit
نهاية يسرى	Left Limit
قيمة دالة	Value of a Function
نهاية الدالة	Limit of a Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

مثال

① أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ ٤ + ∞   ب ٣ - ∞   ج ٠ ÷ ٣   د - ٥ ÷ ٠

هـ ∞ + ∞   و ٠ ÷ ٠   ز ٥ × ∞   ح - ٦ × - ∞

الحل

أ ∞   ب - ∞   ج ٠   د غير معرفة

هـ ∞   و كمية غير معينة   ز ∞   ح ∞

حاول أن تحل

① أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا

أ ٠ ÷ (- ٢)   ب ٧ ÷ ٠   ج ٩ ÷ ∞   د ∞ × ٠

هـ (- ٧) × ∞   و (- ∞) + ١٢   ز ∞ + ∞   ح ∞ ÷ ∞

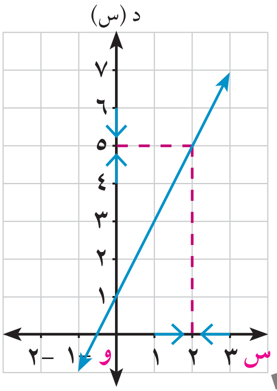
نهاية دالة عند نقطة:

نشاط

ادرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتى:

س > ٢	د(س)
٢,١	٥,٢
٢,٠١	٥,٠٢
٢,٠٠١	٥,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٥,٠٠٠٢
....	....
↓	↓
س ← ٢^+	د(٢^+) ← ٥

س < ٢	د(س)
١,٩	٤,٨
١,٩٩	٤,٩٨
١,٩٩٩	٤,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٤,٩٩٩٨
....	....
↓	↓
س ← ٢^-	د(٢^-) ← ٥



نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد **(٢)** فإن د(س) تقترب من العدد **(٥)**

أي أن د(٢^+) = د(٢^-) = ٥ ونعبر عن ذلك رياضيًّا كالآتى: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (٢ س + ١) = ٥ والتمثيل البيانى للدالة يوضح ذلك:

تعريف ١

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل **وتكتب رمزيًا:** $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

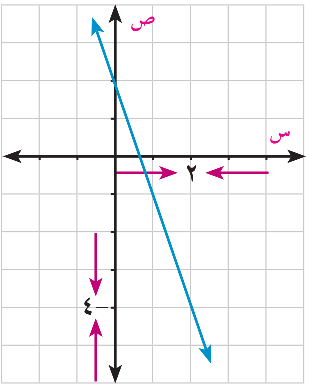
مثال

تقدير النهاية (النهاية تساوى قيمة الدالة)

② قدر $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (٢ - ٣\text{س})$ بيانيًا وعدديًا

الحل

جبريًا: تمثل الدالة الخطية: ص = ٢ - ٣س بيانيًا كما بالشكل المقابل:



ومن الرسم نلاحظ أن:

عندما س ← ٢ فإن د(س) ← -٤

أى أن: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (٢ - ٣\text{س}) = -٤$

عدديًا: نكون جدولاً لقيم د(س) وذلك باختيار قيم س تكون قريبة من العدد ٢ من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتى:

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟶	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	-٤,٣	-٤,٠٣	-٤,٠٠٣	⟵	-٤	⟶	-٣,٩٩٧	-٣,٩٧	-٣,٧

➢ يبين الجدول أنه كلما س اقترب من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد -٤

حاول أن تحل

② قدر نهاية كل مماياتى بيانيًا وعدديًا.

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (١ - ٣\text{س})$　　ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٢)$

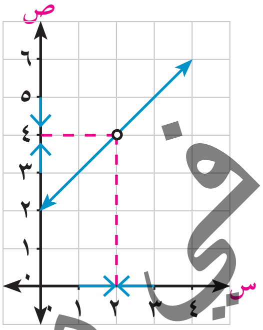
مثال

تقدير النهاية (النهاية لاتساوى قيمة الدالة)

③ قدر $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$ بيانيًا وجبريًا.

الحل

بيانيًا: يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة د حيث: $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$ حيث س ≠ ٢.



ونلاحظ من الشكل أنه عندما س ← ٢ فإن قيمة د(س) ← ٤

لذلك فإن: $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} = ٤$

جبريًا: نكون جدولاً لقيم د(س) ، وذلك باختيار قيم س القريبة من العدد ٢

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⟵	٢	⟶	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	⟵	٤	⟶	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

➢ يبين الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد ٤.

لاحظ من هذا المثال أن:

١) الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{٠}{٠}$ عندما س = ٢

٢) وجود نهاية للدالة عندما س ⟵ ٢ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢ حيث إن س ∈ ع - {٢}
وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهما فى النهايات.

حاول أن تحل

٣) قدر نهاية كل ممايأتى بيانيًّا وعدديًّا:

أ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ١}$ ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣}$ ج $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{١}{\text{س}}$

استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)

نشاط

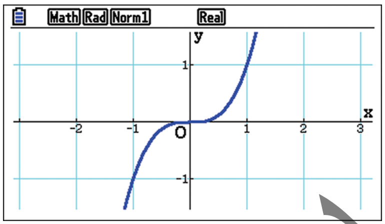
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، **ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:**

١) د(س) = س^٣ عند س ⟵ صفر

٢) د(س) = $\left(\dfrac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١}\right)$ - ٢ عند س ⟵ ١

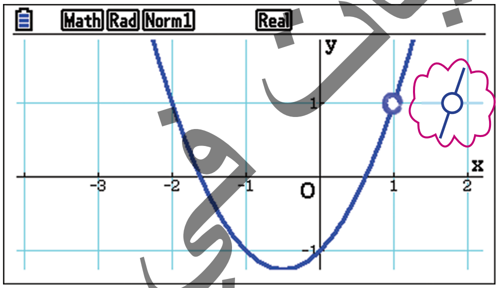
٣) د(س) = $\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عند س ⟵ صفر

يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل (*Geogebra*) في الحاسب الآلى أو فى التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتى:



١) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالةد حيث: د(س) = س^٣

من الرسم $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) = صفر

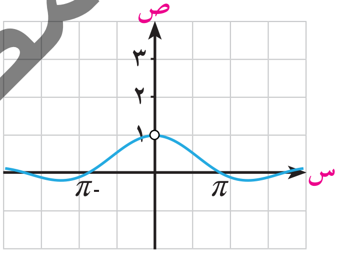


٢) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

د(س) = $\left(\dfrac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١}\right)$ - ٢

من الرسم $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ١

(لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١)



٣) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}}$

من الرسم نجد أن $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

نستنتج من النشاط السابق أن:

إن وجود نهاية الدالة عندما س ⟵ أ لا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

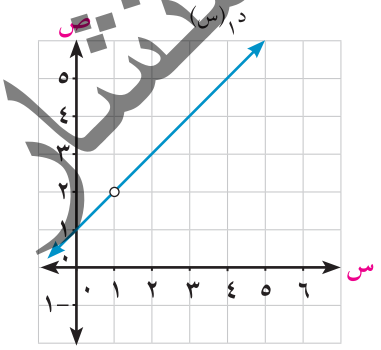
تفكير ناقد: إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ فهل هذا يعنى وجود النهاية عند أ فسر إجابتك.

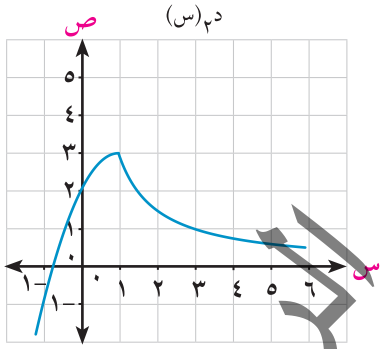
تدريب على النشاط: باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلًّا مما يأتى:

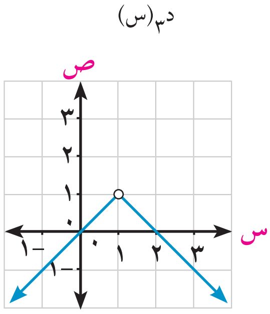
أ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (٢ - س^٢)$ ب) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ٨}{س + ٢}$ ج) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٣س}{س}$

تمـارين ٣ - ١

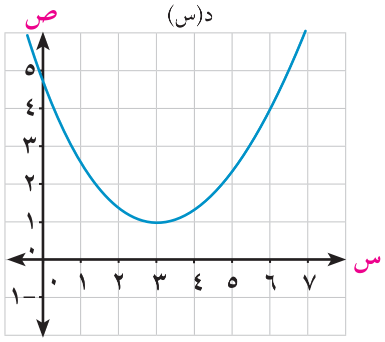
① قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند س ⟵ ١

أ) 

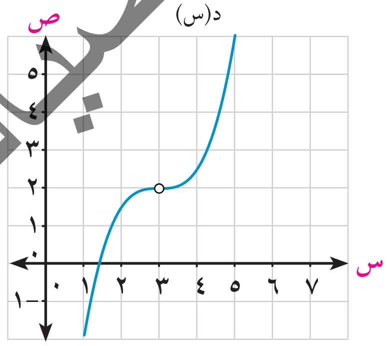
ب) 

ج) 

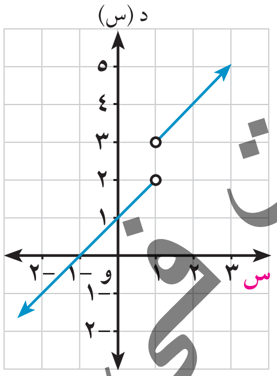
② قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:

أ) 

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) =.........

ب) 

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) =.........

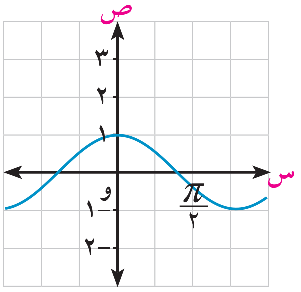
ج) 

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) =.........

③ من الرسم البيانى أوجد:

أ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

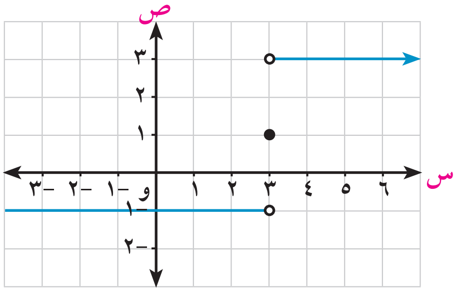
ب) د(٠)



٤ من الرسم البيانى المقابل أوجد

أ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$

ب د(٣)



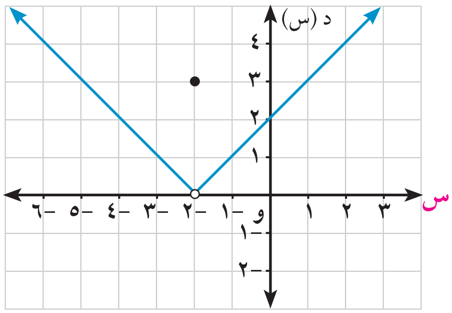
٥ من الرسم البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$

ب د(-٢)

ج $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$

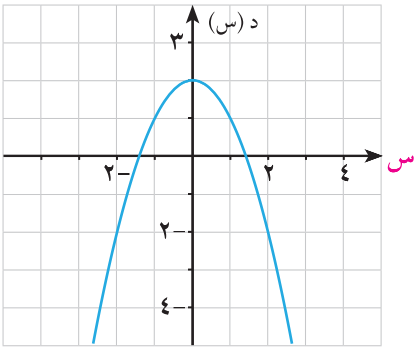
د د(٠)



٦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ (٢ - س^٢)$

ب د(٠)

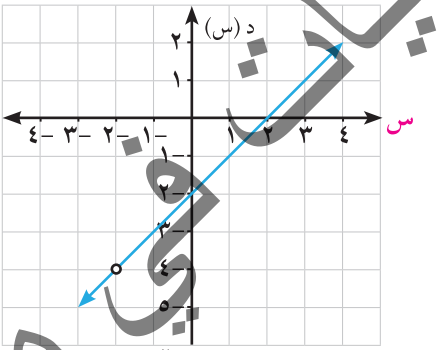


$د(س) = ٢ - س^٢$

٧ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

ب د(-٢)



$د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

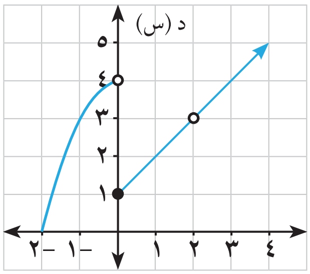
٨ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ د(٠)

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$

ج د(٢)

د $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ \text{د(س)}$



⑨ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

س	١٫٩	١٫٩٩	١٫٩٩٩	←	٢	→	٢٫٠٠١	٢٫٠١	٢٫١
د(س)					؟				

⑩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهــا}}$ (٣ س + ١)

س	−٠٫٩	−٠٫٩٩	−٠٫٩٩٩	←	−١	→	−١٫٠٠١	−١٫٠١	−١٫١
د(س)					؟				

⑪ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} + ١}$

س	−٠٫٩	−٠٫٩٩	−٠٫٩٩٩	←	−١	→	−١٫٠٠١	−١٫٠١	−١٫١
د(س)					؟				

⑫ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

س	١٫٩	١٫٩٩	١٫٩٩٩	←	٢	→	٢٫٠٠١	٢٫٠١	٢٫١
د(س)					؟				

⑬ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل ممايأتى ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.

أ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}$ (٣س - ٤)

ب $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}}$ (س^٢ - ٤)

جـ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٣ + ١}{\text{س} + ١}$

د $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٣ + ٨}{\text{س}^٢ - ٢}$

هـ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}}$ (س + جا س)

و $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س} - \text{س}}{\text{س}}$

ز $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}^٢}$

ح $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{|\text{س}|}$

٣ - ٢

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

Finding the Limit of a Function Algebraically

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند س = أ بيانيًا أو جبريًا عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من س = أ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

$$د_١(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢} ، \quad د_٢(س) = س + ١$$

ماذا تلاحظ؟

أوجد: $\lim\limits_{س \to ٢} د_١(س)$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} د_٢(س)$

ماذا تستنتج؟

تعلم

نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a Polynomial Function*

نظرية ١

◄ **إذا كانت** د(س) كثيرة حدود، أ ∋ ع

فإن: $\lim\limits_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

تذكر أن

تسمى الدالة د كثيرة حدود إذا كانت على الصورة

$د(س) = حـ_٠ + حـ_١ س + حـ_٢ س^٢ ..... + حـ_ن س^ن$

حيث: ن ∋ ط ، $حـ_ن \neq$ صفر،

$حـ_٠ ، حـ_١ ، ... حـ_ن ∋ ع$

مثال

التعويض المباشر

① أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ $\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥)$

ب $\lim\limits_{س \to ٣} (-٤)$

الحل

أ $\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥) = ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ **(بالتعويض المباشر)**

ب $\lim\limits_{س \to ٣} (-٤) = -٤$ **لاحظ أن** د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∋ ع

سوف تتعلم

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

حاول أن تحل

① أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - ٥)$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^٢ + \text{س} - ٤)$ جـ $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (٧)$

نظرية

إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \text{ه(س)} = \text{م}$

فإن:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \text{ك د(س)} = \text{ك.ل}$ حيث $\text{ك} \in \text{ع}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} [\text{د(س)} \pm \text{ه(س)}] = \text{ل} \pm \text{م}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \text{د(س)}.\text{ه(س)} = \text{ل.م}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ه(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$ بشرط $\text{م} \neq ٠$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}} (\text{د(س)})^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}$ حيث $\text{ل}^{\text{ن}} \in \text{ع}$

مثال

استخدام النظرية

② أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س} + ٧}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٥}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣})$

الحل

أ $$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س} + ٧}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٥} = \dfrac{\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (٣\text{س} + ٧)}{\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٥)} = \dfrac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^٢ + ٢(-١) - ٥} = \dfrac{٤}{-٦} = \dfrac{-٢}{٣}$$

ب $$\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣} = \sqrt{\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (٤\text{س}^٢ - ٣)} = \sqrt{٤(-٢)^٢ - ٣} = \sqrt{١٦ - ٣} = \sqrt{١٣}$$

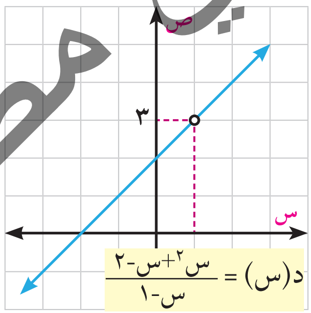
حاول أن تحل

② احسب النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣}{٢\text{س} + ١}$ ب $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{٢\text{س}^٢ + ١}$

إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

لإيجاد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$ حيث $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}{\text{س} - ١}$ باستخدام التعويض المباشر فإننا نصل إلى إحدى حالات عدم التعين $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ويبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة د حيث نجد أن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = ٣$



لذلك نبحث عن دالة أخرى مكافئة للدالة د ولتكن ق حيث $\text{ق(س)} = \text{س} + ٢$

وذلك باختصار العوامل المشتركة غير الصفرية في كل من البسط والمقام.

نظرية ٣

➤ **إذا كانت** د(س) = هـ(س) لكل س $\in$ ح - {أ}

وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ل **فإن** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل

مثال

استخدام التحليل

٣ استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ب $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٢ + س - ٢}$

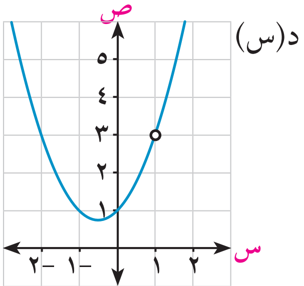
الحل

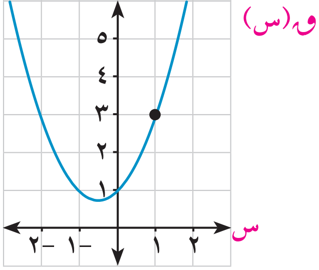
أ نلاحظ أن د(س) = $\dfrac{س^٣ - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س = ١

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة د(س) على الصورة.

$$د(س) = \dfrac{\cancel{(س - ١)}\,(س^٢ + س + ١)}{\cancel{(س - ١)}} = س^٢ + س + ١$$

= هـ(س)





من ذلك نجد إن د(س) = هـ(س) لكل س $\neq$ ١

وحيث أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ٣

فإنه طبقًا **للنظرية ٣ نستنتج أن** $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٣ - ١}{س - ١} = ٣$

طريقة القسمة المطولة

ب نجد أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١، كذلك دالة المقام هـ(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يعني أن العامل (س - ١) مشترك في كل من البسط والمقام، ونظرًا لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار $س^٣ - ٢س^٢ + ١$ كالآتي:

$$\begin{array}{l|l}
س^٣ - ٢س^٢ \quad + ١ & س - ١ \\ \cline{2-2}
س^٣ - س^٢ & س^٢ - س - ١ \\ \hline
٠ - س^٢ \quad + ١ & \\
- س^٢ + س & \\ \hline
٠ - س + ١ & \\
- س + ١ & \\ \hline
\text{صفر} & \\ \hline
\end{array}$$

ارشاد للحل

فى عملية القسمة المطولة

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا بنفس الطريقة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

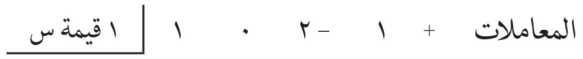
(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة

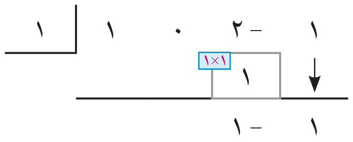
تسمى طريقة القسمة التركيبية

نستخدم فى هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلى:

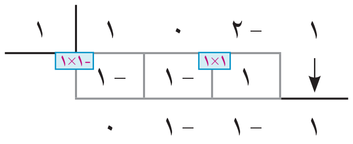
خطوة ١: نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازليًا وتساوى المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:



خطوة ٢: اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثانى ثم اجمع.



خطوة ٣: كرر عمليتى الضرب والجمع.



نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، -١ ، -١ على الترتيب لذلك، فإن خارج القسمة هو $\text{س}^٢ - \text{س} - ١$

أى أن: $\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ١ = (\text{س} - ١)(\text{س}^٢ - \text{س} - ١)$

لذلك فإن: $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ - \text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)} = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ١}{\text{س} + ٢} = -\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

③ أوجد:

أ $\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ + ٨}{\text{س} + ٢}$

ب $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٨}{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}$

جـ $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

د $\underset{\text{س}\leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ١٠\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}$

مثال **استخدام المرافق** *Conjugate*

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤}$

ب $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣}$

الحل

أ **لاحظ أن:** $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} - ١}{\text{س} - ٤} \times \frac{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١} = \underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٣ - ١}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س} - ٣} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س} - ٣} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س} - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)\,(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{\text{س} + ٤ - ٩} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٥)(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣)}{(\text{س} - ٥)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \text{س}(\sqrt{\text{س} + ٤} + ٣) = ٥\,(٣ + ٣) = ٣٠$

حاول أن تحل

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$

نظرية ٤

إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س} - \text{أ}}$ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن} - ١}$

نشاط

استعن بمعلمك للبحث فى الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).

مثال

إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)

⑤ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٨١}{\text{س} - ٣}$

الحل

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٣^٤}{\text{س} - ٣} = ٤(٣)^٣ = ١٠٨$

نتائج

نتائج على النظرية:

١- $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + \text{أ})^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$

٢- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س}^\text{م} - \text{أ}^\text{م}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن} - \text{م}}$

مثال

⑥ أوجد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٤ - ٦٢٥}{\text{س}}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٢ - ٤}$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٤)^٥ + ٣٢}{\text{س} - ٢}$

د $\underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^٥} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^٣} - ٦٤}$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الحل

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{\text{س}} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س}^{٢} - ٢^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times ٢^{٣} = ٢٠$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٤)^{٥} + ٣٢}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(\text{س} - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ \, (-٢)^{٤} = ٨٠$

د $\underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٦٤} = \underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times (١٦^{\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢}}) = \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^{٥} = ٣٢$

كذلك فإن:

$١٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$

حاول أن تحل

٥ أوجد:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٦٢٥}{\text{س} + ٥}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٧}} - ١٢٨}{\text{س} - ١٦}$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س} + ٢٥} - ٢}{\text{س} - ٧}$

تفكير إبداعي:

إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ٦٤}{\text{س} - ٢} = \text{ل}$ **فما قيمة:** ن ، ل

تمـاريـن ٣ – ٢

أكمل ما يأتى:

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ١) =$ ....

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١} =$ ....

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س}} =$ ....

٤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} =$ ....

٥ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \text{أ}^{٥}}{\text{س} - \text{أ}} =$ ....

٦ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt[٣]{٢}}{\text{س} - ٢} =$ ....

٧ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٣}} - ١}{\text{س}^{٤} - ١} =$ ....

٨ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-١} - ٢^{-١}}{\text{س}^{-٣} - ٢^{-٣}} =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٩ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} + ١}$ تساوى

أ -٣ ب -٢ ج ٣ د ليس للدالة نهاية

⑩ $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ تساوى

أ ١ ب $\frac{\pi}{٢}$ ج $\frac{٢}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

⑪ $\underset{\text{س}\to ١٦}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١٦}$ تساوى:

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ ج ١ د ليس للدالة نهاية

⑫ $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ تساوى

أ ٠ ب ١ ج $\frac{٤}{\pi}$ د ليس للدالة نهاية

⑬ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٥ - ٢٤٣}{\text{س}^٣ - ٢٧}$ تساوى

أ ٠ ب $\frac{٥}{٣}$ ج ١٥ د ٩

⑭ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{ا}}{\text{س} - ٢}$ لها وجود فإن ا تساوى:

أ -١ ب ١ ج ٢ د ٤

⑮ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{٥}{(\text{س}-٢)^٣}$ تساوى:

أ $-\frac{٥}{٢}$ ب صفر ج ٥ د ليس للدالة نهاية

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)

⑯ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢)$

⑰ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{س} - ٣}$

⑱ $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س} - \text{جا س})$

⑲ $\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{س}}$

⑳ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٣ + ١}$

㉑ $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{٩ - \text{س}}{\text{س}^٢ - ٨١}$

㉒ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

㉓ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}$

㉔ $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ١٢}{\text{س} - ٩}$

㉕ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\frac{١}{٢ + \text{س}} - \frac{١}{٢}}{\text{س}}$

㉖ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^٤ - ١٦}$

㉗ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ١}\right)$

㉘ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٣ - ٤\text{س}}$

㉙ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ - \text{س} + ٤}{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٤}$

㉚ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١٥}$

㉛ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س} - ٢}$

㉜ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{\text{س} - ٢}$

㉝ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٧]{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

㉞ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{-٩} - \frac{١}{٥١٢}}{\text{س} - ٢}$

㉟ $\underset{\text{س}\to\sqrt{٥}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^٤ - \sqrt{٢٥}}$

㊱ $\underset{\text{س}\to ٨١}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt[٤]{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٨١}$

(٣٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٥} - ٣٢}$

(٣٨) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

(٣٩) $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

(٤٠) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

(٤١) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ \text{ هـ}}$

(٤٢) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{س^{٥} + ٢٤٣}$

(٤٣) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ \text{ هـ}}$

(٤٤) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٨} - ٣}{س + ١}$

(٤٥) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$

(٤٦) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س + ٦} - ٣}$

(٤٧) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$

(٤٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$

(٤٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{س - ١} - \dfrac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

(٥٠) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$

(٥١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤}$

نشاط

(٥٢) **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

أولًا: ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة. **ثانيًا:** أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة ع = س(٢٤ ـ ٢ س)^{٢}

ثالثًا: أوجد حجم العلبة عندما س = ٤ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما س ← ٤ مستخدمًا الجدول التالي:

س	٣	٣,٥	٣,٩	←	٤	→	٤,١	٤,٥	٥
ع	……………	……………	……………	←		→	……………	……………	……………

رابعًا: استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند س = ٤

تفكير إبداعي:

(٥٣) إذا كان $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ **فأوجد:** $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س)$

(٥٤) إذا كان $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$ **فأوجد:**

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د(س)$ ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س)}{س}$

(٥٥) **الربط بالتجارة:** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د(س) = ٠,٢ س^{٢} + ٤٠ س + ١٥٠. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

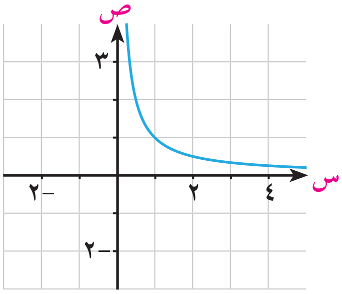
٣ - ٣

نهاية الدالة عند اللانهاية

Limit of the Function at Infinity

نحتاج فى كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضح ذلك.

نشاط



استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د

حيث: د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم **نلاحظ أن:**

- كلما زادت قيم س واقتربت من ما لا نهاية اقتربت قيم د(س) من عدد محدد.

أكمل الجدول التالى لإيجاد العدد الذى تقترب منه د(س)

س	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	س ← ∞
د(س)	٠,١	٠,٠١				س ← ؟

تعلم

نهاية دالة عند اللانهاية

Limit of a Function at Infinity

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت س من ما لانهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر.

نظرية

$$\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} = ٠$$

نتيجة

$$\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠ \quad \{حيث\ ن \in ع^{+}،\ أ\ ثابت\}$$

قواعد أساسية:

- $\lim_{س \to \infty} جـ = جـ$ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\lim_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$

لاحظ أن: نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

سوف تتعلم

- نهاية الدالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

المصطلحات الأساسية

- نهاية دالة عند اللانهاية.

Limit of a Function at Infinity

الأدوات المستخدمة

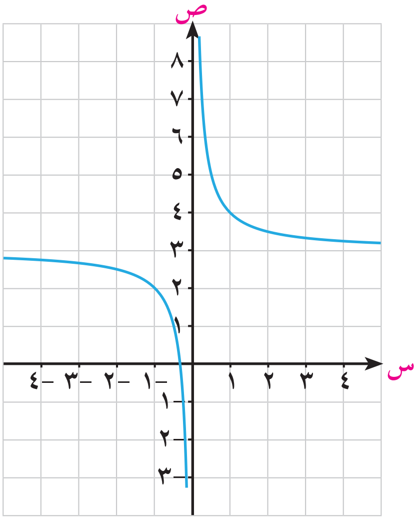
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال

① أوجد:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٣\right)$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right)$

➤ ثم تحقق من ذلك بيانيًا باستخدام أحد البرامج الرسومية.

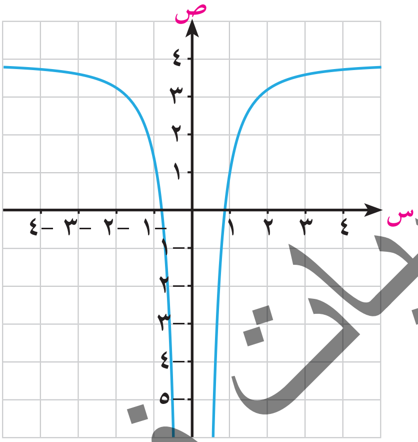


الحل

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س} + ٣\right) = ٣$



ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٤ - \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{س^{٢}}$

$= ٤ - ٣ \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

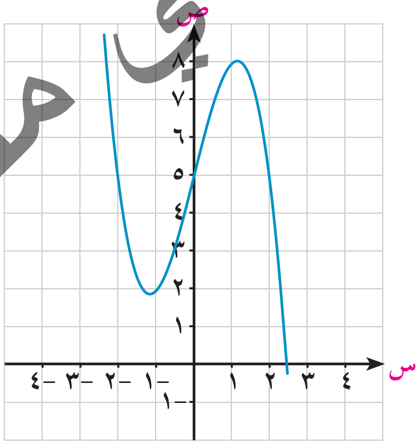
$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = ٤$

حاول أن تحل

① أوجد:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{س} + ٢\right)$ ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{س^{٢}} + ٥\right)$

مثال



② أوجد: $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤س - س^{٣} + ٥\right)$

الحل

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \left(\frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}}\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}}\right)$

$= \infty \times -١ = -\infty$

حاول أن تحل

② أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} + ٢)$

ب $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ - ٣\text{س} - \text{س}^{٣})$

مثال

③ أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

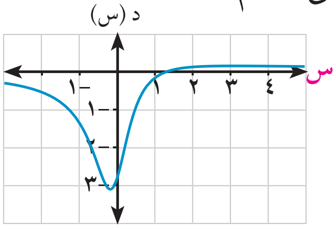
ب $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

ج $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

الحل

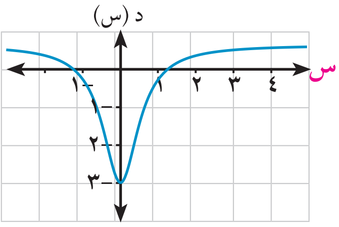
فى كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على $\text{س}^{٢}$ (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).

أ $$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)}{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\right)} = \dfrac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$$



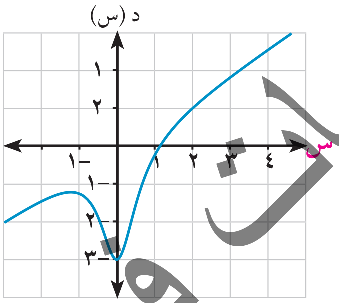
ب $$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٢ - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)}{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\right)}$$

$$= \dfrac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \dfrac{٢}{٣}$$



ج $$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٢\text{س} - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)}{\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ + \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\right)}$$

$$= \dfrac{\infty - ٠}{٣ + ٠} = \infty$$



نستنتج من هذا المثال أن: عند إيجاد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.
- النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

حاول أن تحل

③ أوجد:

أ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١}{٢\text{س}}$

ب $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\text{س}^{٣} - ٥\text{س}}{٨\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ٢}$

ج $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٦\text{س}^{٢} + ١}{٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

مثال

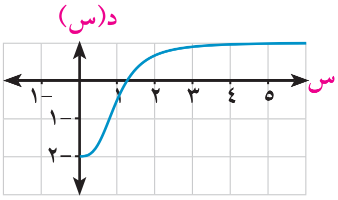
④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤} \right)$

الحل

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$



$د(س) = \dfrac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$

$\because$ س $\longrightarrow \infty$

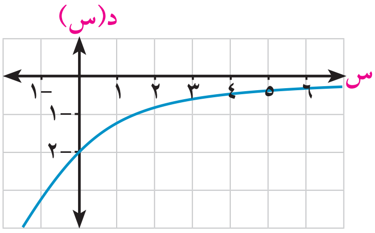
$\therefore$ س > ٠ أي أن $|س| = س$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢}{س^{٣} + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$= \dfrac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \dfrac{٢}{س^{٣}}\right)}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \dfrac{١}{س^{٣}}\right)} = \dfrac{١ - ٠}{١ + ٠} = ١$$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤} \right)$



$د(س) = س - \sqrt{س^{٢} + ٤}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(س - \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}{١} \times \dfrac{\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}{\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س^{٢} - ٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}}$$

$\because$ س $\longrightarrow \infty$

$\therefore$ س > ٠ أي أن: $\sqrt{س^{٢}} = |س| = س$ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^{٢}}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٤}{س + \sqrt{س^{٢} + ٤}} = \dfrac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} -\dfrac{٤}{س}}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \sqrt{١ + \dfrac{٤}{س^{٢}}}\right)} = \dfrac{٠}{١ + ١} = ٠$$

حاول أن تحل

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ٣}{\sqrt{٤س^{٢} + ٢٥}}$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٣س^{٢} + ٥س} - \sqrt{٣}\, س \right)$

تمـارين الدرس ٣ – ٣

أكمل ما يأتى:

(١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{\text{س}}\right) =$ ....

(٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - ٢\right) =$ ....

(٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (-٧) =$ ....

(٤) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٣) =$ ....

(٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}}$ ....

(٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٥}{\text{س}^{٢} + ١} =$ ....

(٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} + ٣}{\text{س}^{٣} - ٥} =$ ....

(٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}} =$ ....

(٩) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{٧}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\right) =$ ....

(١٠) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}\right) =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٦\text{س}}{٢\text{س} + ٣}$ تساوى

أ صفر ب ٢ ج ٣ د ∞

(١٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٤}{\text{س}} + ١}$

أ صفر ب ١ ج ٢ د ∞

(١٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٣}{٢ - \text{س}^{٢}}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٣}{٢}$ د ∞

(١٤) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{٢\text{س} - ١}$

أ صفر ب $\frac{١}{٢}$ ج ١ د ∞

(١٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{١ + \text{س}}{٤\text{س} - ١}}$

أ -١ ب $\frac{١}{٤}$ ج $\frac{١}{٢}$ د ١

أوجد:

(١٦) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}$

(١٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١)$

(١٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٧\text{س}}{٢ + ٣\text{س}}$

(١٩) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٣}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٣}$

(٢١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤}$

٢٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ١}{س^٢ + ٤س + ١}$

٢٣ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٢}{٣س^٢ + ٤س - ١}$

٢٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^٢ - ١}{٤س^٣ - ٥س - ١}$

٢٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^٢ - ٦}{(س - ١)^٢}$

٢٦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٧ + \frac{٢س^٢}{(س + ٣)^٢}\right)$

٢٧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٣س^٢} - \frac{٥س}{س + ٢}\right)$

٢٨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س}{٢س + ١} + \frac{٣س^٢}{(س - ٣)^٢}\right)$

٢٩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-س}{\sqrt{٤ + س^٢}}$

٣٠ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^٣}$

٣١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٤س^٢ - ٢س + ١} - ٢س\right)$

٣٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٥س^٢ + ٤س + ٧} - \sqrt{٥س^٢ + س + ٣}\right)$

٣٣ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س\left(\sqrt{٤س^٢ + ١} - ٢س\right)$

٣٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + س - ١}{٨س^٢ - ٣}$

٣٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٣س^٣}{\sqrt{س^٦ + ٩}}$

٣٦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^٣(٣ - ٢س^٢)}{٣س(س^٢ + ٧)^٢}$

٣٧ إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{أس^٢ + ٣ب س + ٥} - ٢س\right) = ٣$ فما قيمة كل من أ، ب.

٣٨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{-١} + ٣س^{-٢} + ٥}{٢س^{-٢} - س^{-٣} + ١}$

٣٩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٣} + س^{-١}}$

٤٠ **تفكير إبداعى**

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية $جـ = \frac{١}{٢} س + ٥٠٠٠$ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

أوجد:

١ تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أ ١٠٠٠٠ كارت

ب ١٠٠٠٠٠ كارت

٢ أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًّا من الكروت.

٣ - ٤

نهايات الدوال المثلثية

Limits of Trigonometric Functions

نشاط

إذا كانت د دالة حيث د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ والمطلوب دراسة قيم الدالة د عندما س ← ٠ حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائري

كون جدولًا لدراسة سلوك الدالة د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما تقترب س من الصفر مستخدمًا التقدير الدائرى

س	١	٠,١	٠,٠٠١	←	٠	→	٠,٠٠١	٠,٠١-	١٠
$\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	....	←	....	→	....	٠,٩٩٨٣	٠,٨٤١٥

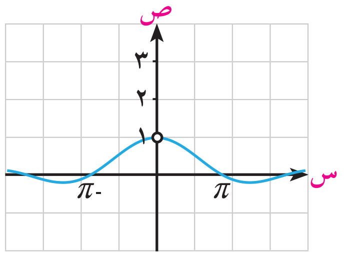
من الجدول السابق استنتج $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

تعلم

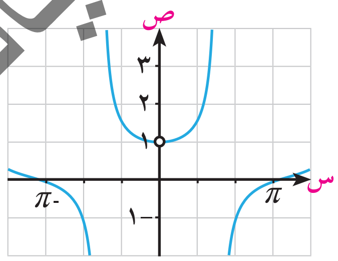
نظرية ١

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن:

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١ \qquad \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$



د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$



د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

تعبير شفهي

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

فسر إجابتك.

نتيجة ا: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ا س}}{\text{س}} = \text{ا}$ ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ا س}}{\text{س}} = \text{ا}$

سوف تتعلم

- نهاية دالة الجيب.
- نهاية دالة الظل.

المصطلحات الأساسية

- دالة مثلثية
  Trigonometric Function
- نهاية دالة مثلثية
  Limit of a Trigonometric Function

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

أضف إلى معلوماتك

يوجد لهذه النظرية أكثر من برهان يمكن الاطلاع عليه من الرابط:

http://math.stackexchange.com/question/75130

مثال

① أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣س}{س} = ٣$

ب $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٢س}{٧\,س} = \frac{١}{٧} \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٢س}{س} = \frac{٢}{٧}$

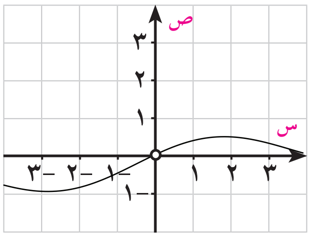
جـ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥\,س \text{ جتا } ٢\,س}{س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥س}{س} \times \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا } ٢\,س = ٥ \times ١ = ٥$

حاول أن تحل

① أوجد:

أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٢س}{٣س}$ ب $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٤س}{٥\,س}$ جـ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \pi\,س}{١ - س}$

نتيجة ٢



أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} = \text{صفر}$

➤ استعن بمدرسك فى برهان نتيجة (٢)

مثال

② أوجد:

أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{\text{ظا } س}$ ب $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^{٢}}$

الحل

أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{\text{ظا } س} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} \times \frac{س}{\text{ظا } س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س} \times \frac{س}{\text{ظا } س} = ٠ \times ١ = ٠$

ب $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^{٢}} \times \frac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}(١+\text{جتا}س)} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}(١+\text{جتا}س)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} \times \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ + \text{جتا}س} = (١)^{٢} \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تذكر أن

$\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س = ١$

حاول أن تحل

② أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} ٦س^{٢} \text{ قتا } ٢س \text{ ظتا } س$ ب $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{\text{جا } ٢س}$

مثال

③ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} + \text{جا س}}{\text{٢س}}$

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س + س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (١ - جتا س)}}{\text{١ - جتا س}}$

د $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{٣س}}{\text{٥ س}^٢}$

الحل

أ $= \dfrac{١}{٢} \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}} + \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{١}{٢} \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{س - ١} + \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{١}{٢} \left(٠ - ١ + ١\right) = ٠$

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س + س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + جتا س}}{\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \dfrac{\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{١ + جتا س}\right)}{\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \dfrac{\text{١ + جتا ٠}}{\text{١} \times \text{جتا ٠}} = \dfrac{١ + ١}{١} = ٢$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(١ - جتا س)}}{\text{١ - جتا س}}$

اعتبر ١ - جتا س = ص

عندما س ⟵ ٠ نجد أن ص ⟵ ٠

$\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = ١$

$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(١ - جتا س)}}{\text{١ - جتا س}} = ١$

د $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{٣س}}{\text{٥ س}^٢}$

$= \dfrac{١}{٥} \left(\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٣س}}{\text{س}}\right)^٢$

$= \dfrac{١}{٥} \times (٣)^٢$

$= \dfrac{٩}{٥}$

حاول أن تحل

③ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٣س}}{\text{٥ س}^٣\text{-٤س}}$

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(س-١)}}{\text{س}^٢\text{+س-٢}}$

جـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{٣ س}^٢}$

د $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جا ٢س + حا}^٢\text{ ٢س}}{\text{ط}^٢\text{ ٣س + س}^٢}$

تمـــارين ٣ - ٤

أكمل مايأتى:

① $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \text{ جتا ٣ س} =$ ....

② $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٢}}}{\text{نهــا}} \text{ جا ٢ س} =$ ....

③ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \text{ ظا س} =$ ....

④ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٧ س}}{\text{س}} =$ ....

⑤ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \text{ ظا } \frac{\text{٣س}}{\text{٤س}} =$ ....

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٥}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا (س - ٥)}}{\text{٣ (س - ٥)}} =$ ....

⑦ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \pi \text{س}}{\text{٢ س}} =$ ....

⑧ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{س}^{\text{٢}}} =$ ....

⑨ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{٣ + ٢ س}}{\text{جتا ٤ س}} =$ ....

⑩ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتا س}}{\text{٣ س}} =$ ....

⑪ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{٢ س}}{\text{ظا ٣ س}} =$ ....

⑫ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \text{ ٣ س قتا ٢ س} =$ ....

⑬ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}}} =$ ....

⑭ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{ س ظا ٣س}}{\text{٤س}^{\text{٢}}} =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑮ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}}$ تساوى

أ صفر   ب $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ج ١   د ٣

⑯ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا ٤س}}{\text{٥س}}$ تساوى

أ صفر   ب $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ ج ١   د $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

⑰ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٢ س + ٣ ظا س}}{\text{٥س}}$ تساوى

أ ١   ب $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$ ج $\frac{\text{٦}}{\text{٥}}$ د ٢

⑱ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س}}{\text{س جا ٣ س}}$ تساوى

أ $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$ ب $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ج $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ د $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

⑲ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ س}}{\text{جا } \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ س}}$ تساوى

أ $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ ب $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$ ج $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ د $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

⑳ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ حيث س بالتقدير الستينى

أ ١   ب $\frac{\pi}{\text{١٨٠}}$ ج $\frac{\text{١٨٠}}{\pi}$ د π

أوجد:

٢١ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{٥س}}$

٢٢ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{ظا س}}$

٢٣ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}$

٢٤ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٣(١- جتا س)}}{\text{س}}$

٢٥ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س (١ - جتا س)}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٢٦ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا س ظا س}}{\text{س}}$

٢٧ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{س}}$

٢٨ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٢٩ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{(١- جتا}^{\text{٢}}\text{ س)}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٣٠ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا س - ١}}{\text{جا س}}$

٣١ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س - س جتا س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٣س}}$

٣٢ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ - ظا س}}{\text{جاس - جتا س}}$

٣٣ $\underset{\text{س} \to \frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س جتا (-٢س+١)}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{+س}}$

٣٤ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ - ٣ جا س}}{\text{س}}$

٣٥ $\underset{\text{س} \to \text{٠}^{-}}{\text{نهــا}} \text{(١ + جتا س)} \times \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٣٦ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٣س}^{\text{٢}}\text{ +حا}^{\text{٢}}\text{ ٥س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٣٧ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٥س}^{\text{٣}}\text{+جا}^{\text{٣}}\text{٥س}}{\text{٢ س}^{\text{٣}}}$

٣٨ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{٢س}^{\text{٢}}\text{ + جا ٣ س}}{\text{٢س}^{\text{٢}}\text{ +ظا ٦ س}}\right)^{\text{٤}}$

٣٩ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٢س}^{\text{٣}}\text{ +س جا ٥س}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ - ظا ٣ س}^{\text{٢}}}$

٤٠ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ - جتاس + جا س}}{\text{١ - جتا س - جا س}}$

٤١ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٢س +٥ جا ٣ س}}{\text{٢ جا ٣ س - ظا ٥س}}$

٤٢ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س ظا ٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}$

٤٣ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ - جتا ٣س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{ ٢س - ١}}$

٤٤ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٢ - جتا ٣ س - جتا ٤ س}}{\text{س}}$

٤٥ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٣ س}^{\text{٢}}\text{ + جا}^{\text{٢}}\text{ ٥ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٤٦ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{١ - جتا ٣ س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{ ٥ س -١}}$

٤٧ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا (جا س)}}{\text{٥ جا س}}$

٤٨ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}} \text{ - س}\right)}$

٤٩ $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \text{س (قتا ٢ س - ظتا ٣ س)}$

بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

٣ - ٥

Existence of Limit of a Function at a Point

سوف تتعلم

- النهاية من اليمين
- النهاية من اليسار

المصطلحات الأساسية

نهاية يمنى	Right Limit
نهاية يسرى	Left Limit

الأدوات المستخدمة

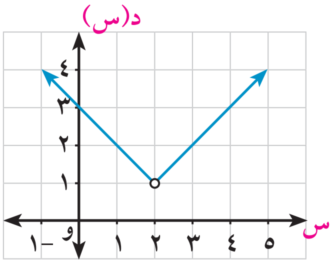
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

فكر و ناقش

شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د **حيث**

$$د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{لكل } س > ٢ \\ ٣ - س & \text{لكل } س < ٢ \end{cases}$$



شكل (١)

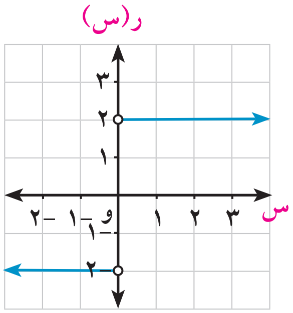
- **ابحث** وجود $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س)$
- **ابحث** وجود $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

هل $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

$$ر(س) = \begin{cases} ٢ & \text{لكل } س > ٠ \\ ٢- & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$$



شكل (٢)

- **ابحث** وجود $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ ر(س)$
- **ابحث** وجود $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ ر(س)$

هل $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ ر(س) = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ ر(س)$

تعلم

نهاية الدالة *Limit of a Function*

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل $\in$ ع

وتكتب رمزيًّا:

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = ل \text{ إذا و فقط إذا كان: } د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$$

حيث: $د(أ^{+}) = \underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

$د(أ^{-}) = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

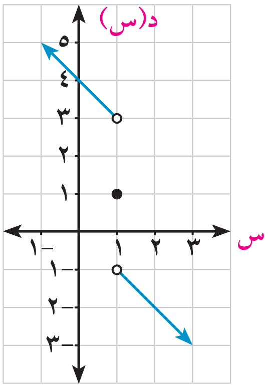
مثال توضيحى

أ لاحظ فى شكل (١) أن:

$د(١^-) = ٣$ $\qquad$ $د(١^+) = -١$

$\therefore$ $د(١^-) \neq د(١^+)$

$\therefore$ لايوجد نهاية للدالة د عند س ⟵ ١



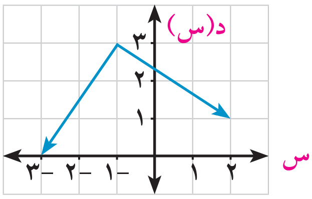
شكل (١)

ب لاحظ فى شكل (٢) أن:

$د(-١^-) = ٣$ $\qquad$ $د(-١^+) = ٣$

$\therefore$ $د(-١^-) = د(-١^+) = ٣$

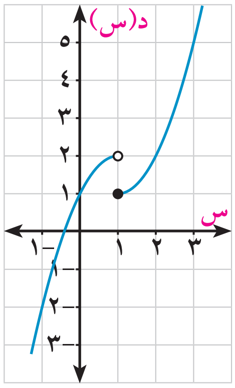
$\therefore$ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٣$



شكل (٢)

حاول أن تحل

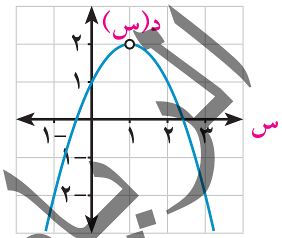
① ادرس الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ثم أوجدْ:



أ $د(١^-)$

ب $د(١^+)$

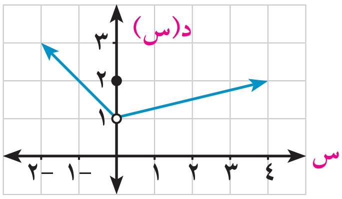
ج $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ د(س)$



أ $د(١^-)$

ب $د(١^+)$

ج $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ د(س)$



أ $د(٠^-)$

ب $د(٠^+)$

ج $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س)$

مثال

① أوجد نهاية الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} س|س| - ١ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} - ٢ & س > ٠ \end{cases}$ عندما س ⟵ ٠

الحل

بإعادة تعريف الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س(-س) - ١ & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{س}{س} - ٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases} = \begin{cases} -س^٢ - ١ & \text{لكل } س < ٠ \\ -١ & \text{لكل } س > ٠ \end{cases}$$

$\because$ $د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}}\ (-س^٢ - ١) = -١$

$د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}\ -١ = -١$ $\qquad$ $\because$ $د(٠^-) = د(٠^+) = -١$ $\qquad$ $\therefore$ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س) = -١$

حاول أن تحل

② إذا كان د(س) = $\begin{cases} |\text{س} - ٣| & \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & \text{س} = ٣ \end{cases}$

أوجد $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س) إن كان ذلك ممكنًا

مثال

② ابحث وجود نهاية للدلة د حيث: د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}} & \text{لكل س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س} + \text{ظا س}}{٣\text{س} - \text{جا}٢\text{س}} & \text{لكل س} > ٠ \end{cases}$ عندما س ← ٠

الحل

$$\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٢) = ٢$$

$$\text{د}(٠^+) = \underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \text{ظا س}}{٣\text{س} - \text{جا}٢\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا}٢\text{س}}{\text{س}}}{\frac{٣\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}} = \underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{١ + \frac{\text{ظا}٢\text{س}}{\text{س}}}{٣ - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{١ + ١}{٣ - ٢} = ٢$$

$\because$ د (٠^-) = د (٠^+) = ٢ $\therefore$ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٢

حاول أن تحل

③ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ π حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س} - \pi} & \text{لكل س} < \pi \\ \text{جتا س} & \text{لكل س} > \pi \end{cases}$

مثال

③ ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ⟵ ١ حيث: د(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$

الحل

$\because$ د (س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≥ ٠ $\therefore$ مجال الدالة د (س) = [١ ، ∞[

$\because$ د (١^+) = $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}$ د (س) $\therefore$ د (١^+) = $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$ = صفر

د (١^-) غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١

$\therefore$ د (س) ليس لها نهاية عندما س ⟵ ١

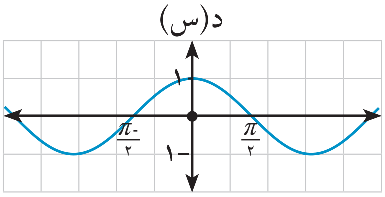
حاول أن تحل

④ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د (س) = $\sqrt{٣ - \text{س}}$

تمارين ٣ – ٥

أكمل ما يأتى:

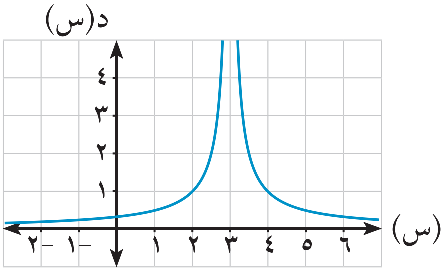
① من الشكل البيانى المقابل:



أ $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

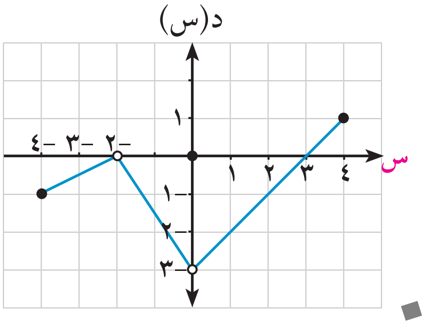
② من الشكل البيانى المقابل:



أ $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

③ من الشكل البيانى المقابل:



أ $\underset{س \to ٢-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

جـ $\underset{س \to ١-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

د $\underset{س \to ٤-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

هـ $\underset{س \to ٤}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

④ الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٢ لكل س ≥ ٠
٢ - س لكل س < ٠

أ $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

⑤ الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٣ لكل س > ٠
-٣ س لكل س ≤ ٠

أ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

⑥ إذا كانت د(س) = { س لكل س ≥ ٠
$\frac{١}{س}$ لكل س < ٠

أ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ب $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهــا}}$ د(س) = ...

ابحث نهاية الدوال الآتية « إن وجدت»:

⑦ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} ٢\,س & \text{لكل } س < ٢ \\ س^{٢} & \text{لكل } س \geqslant ٢ \end{cases}$

⑧ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{لكل } س < -٣ \\ ٣\,س + ١ & \text{لكل } س \geqslant -٣ \end{cases}$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & \text{لكل } س < -٠ \\ ٣س + ١ & \text{لكل } س \geqslant -٠ \end{cases}$

⑩ $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}}$ د(س) حيث د(س) = $\begin{cases} ٢\,س + ١ & \text{لكل } س < -١ \\ -١ & \text{لكل } س > -١ \end{cases}$

⑪ أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية حيث عندما $س \to ١$ د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س-١)^{٢}}{|س-١|} & \text{لكل } س < ١ \\ ٦س - ٣\,م & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$

⑫ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث عندما $س \to ١$ د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢\,\text{جا}\,س}{\pi - س} & \text{لكل } س < \pi \\ ١ + \text{جتا}\,س & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$

عندما $س \to \pi$

⑬ أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ د(س) = ٧ ، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣م & \text{لكل } س < ٢ \\ ٥س + ك & \text{لكل } س > ٢ \end{cases}$

⑭ أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د(س) نهاية عندما $س \to -١$ حيث، د(س) = $\begin{cases} س^{٢}+ك & \text{لكل } س < -١ \\ س+٤ & \text{لكل } س > -١ \end{cases}$

⑮ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما $س \to ٠$ حيث، د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٥س + \text{ظا}\,٢\,س}{٦\,س + \text{جا}\,س} & \text{لكل } س > ٠ \\ \text{جتا}\,س & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$

⑯ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣\,س}{\text{ظا}\,س} & \text{لكل } -\frac{\pi}{٣} < س < ٠ \\ ٣\,\text{جتا}\,س & \text{لكل } ٠ < س < \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

أ عندما $س \to -\frac{\pi}{٣}$ ب $س \to \frac{\pi}{٣}$ ج $س \to ٠$

⑰ ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = $\dfrac{١}{س - ٢}$ عندما $س \to ٢$

٣ - ٦

الاتصال

Continuity

سوف تتعلم

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

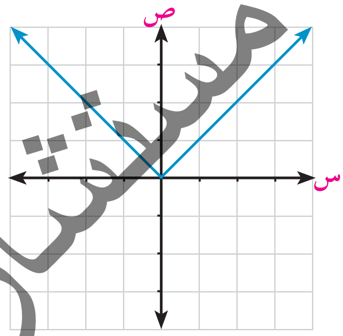
- اتصال دالة
  Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة عند نقطة
  Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
  Continuity of a Function on Interval

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

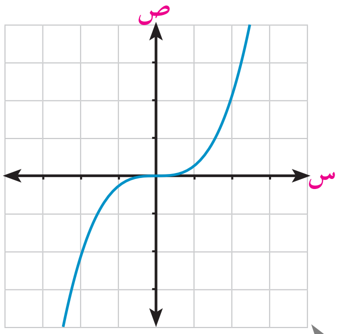
فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟



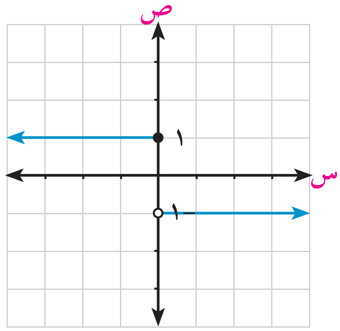
$د_{١}(س) = |س|$

شكل (١)



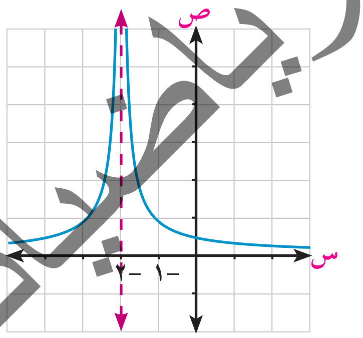
$د_{٢}(س) = ٢س^{٣}$

شكل (٢)



$$د_{٣}(س) = \begin{cases} ١ & \text{لكل } س \leqslant ١ \\ -١ & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$$

شكل (٣)



$$د_{٤}(س) = \frac{١}{|س + ٢|}$$

شكل (٤)

فى **شكل (١)** ، **(٢)** نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أى نقطة.

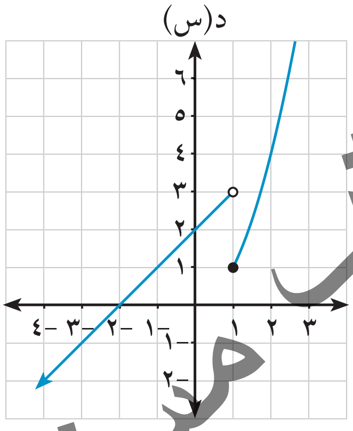
فى **شكل (٣)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ...

فى **شكل (٤)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ...

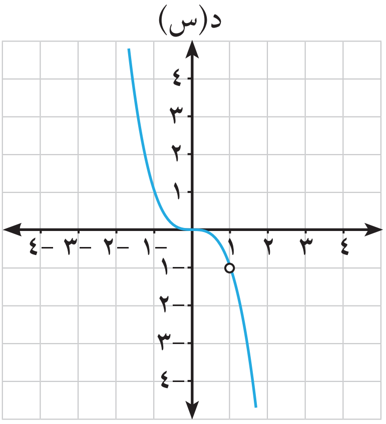
مما سبق **نستنتج أن** الدالة (د) تكون متصلة عند س = أ إذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

اتصال دالة عند نقطة

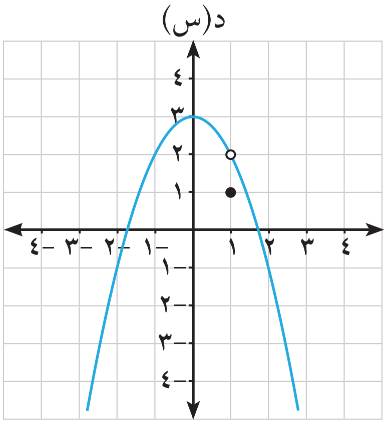
Continuity of a fanction at a Point



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د(س)، د(١) إن وجدت.

في الشكل (١): $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ١ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٣ **أي أن** $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د(س) غير موجودة بينما د(١) = ١

في الشكل (٢): $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = -١ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = -١ **أي أن** $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د(س) = -١ ، د(١) غير معرفة.

في الشكل (٣): $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٢ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٢ **أي أن** $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ٢ بينما د(١) = ١

أي أن: $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ د(س) ≠ د(١)

لذلك تكون الدالة د في كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند س = ١

حاول أن تضع تعريفًا للدالة المتصلة عند نقطة من خلال هذه الملاحظات.

تعريف

تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

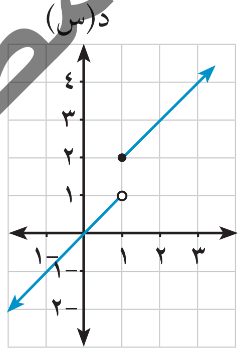
- ≺ $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) موجودة
- ≺ د(أ) معرفة
- ≺ $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ د(س) = د (أ)

مثال

بحث اتصال دالة عند نقطة

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = {
س   لكل س ⩾ ١
س +١   لكل س < ١

أ عند س = ٠   **ب** عند س =١



الحل

أ بحث الاتصال عند س = ٠

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س)= $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ س = صفر ،

د(٠) = ٠ أي أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ د(س) = د(٠)

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٠

ب بحث اتصال الدالة عند س = ١

نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة س = ١ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنى ونهاية يسرى للدالة عند س =١

$\text{د}(١^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١) = ٢ \text{ ، } \text{د}(١^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ س} = ١$

أى أن: د$(١^{+}) \neq$ (د(١-) وهذا الشرط يكفى لعدم اتصال الدالة د عند س = ١ والشكل البيانى يوضح عدم اتصال الدالة عند س = ١

؟ حاول أن تحل

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{٤س - ١} & \text{عندما س} \leqslant ١ \\ \text{س}^{٢} + ٢ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

مثال

التحقق من اتصال دالة عند نقطة

② ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ عند س = ٢، س = ٣

ب د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

الحل

أ **أولًا:** بحث اتصال الدالة عند س = ٢

∵ مجال الدالة = ع - {٢}

∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

ثانيًا: بحث اتصال الدالة عند س = ٣

$\because \text{د}(٣) = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦ \text{ ، } \because \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = \text{د}(٣)$ $\therefore$ د(س) متصلة عند س = ٣

ب بإعادة تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} ٨ - \text{س} & \text{عندما س} \leqslant ٣ \\ \text{س} + ٢ & \text{عندما س} > ٣ \end{cases}$

$\because \text{د}(٣) = ٥ \text{ ، } \because \text{د}(٣^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} (٨ - \text{س}) = ٥ \text{ ، } \text{د}(٣^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٢) = ٥$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = ٥$ **أي أن** $\text{د}(٣) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \text{ د(س)}$

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٣

؟ حاول أن تحل

② ابحث اتصال كل من الدوال لآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

ب د(س) = ٣ - |س -٢| عند س = ٢

إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة (إن كان ذلك ممكنًا)

مثال

③ أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س =١

أ $د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}$

ب $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢س ، & س > ١ \\ ٥س - ١ ، & س < ١ \end{cases}$

الحل

أ لكى تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن $\lim\limits_{س \leftarrow ١} د(س) = د(١)$

$\therefore \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١} = \lim\limits_{س \leftarrow ١} (س + ٣)$

أي أن $\lim\limits_{س \leftarrow ١} د(س) = ٤$

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} & \text{عندما } س \neq ١ \\ ٤ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

ب لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١، لابد أن تكون $د(١) = \lim\limits_{س \leftarrow ١} د(س)$

$\therefore د(١^{+}) = \lim\limits_{س \leftarrow ١} (س^{٣} + ٢س) = ١ + ٢ \times ١ = ٣$ ، $د(١^{-}) = \lim\limits_{س \leftarrow ١^{-}} (٥س - ١) = ٥ - ١ = ٤$

$\because د(١^{-}) \neq د(١^{+})$ لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عندماس ← ١

ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

حاول أن تحل

③ أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث $د(س) = \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$

④ بين أن $د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

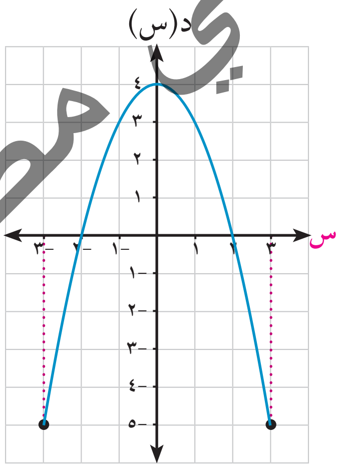
ثم أوجد قيمة هـ التى تجعل $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ هـ + ١ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

اتصال دالة على فترة *continuity of a Function on an Interval*

يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث $د(س) = ٤ - س^{٢}$ فى الفترة [-٣، ٣] ولكى تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣] فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

أى أن: $\lim\limits_{س \leftarrow أ} د(س) = د(أ)$ لكل أ ∋]-٣، ٣[

$\lim\limits_{س \leftarrow -٣^{+}} د(س) = د(-٣)$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} د(س) = د(٣)$



ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتى:

تعريف ٢

إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة]أ، ب[

٢- $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(أ) ، $\underset{س \to ب^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(ب)

بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ع أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب وجيب التمام: متصلة على ع

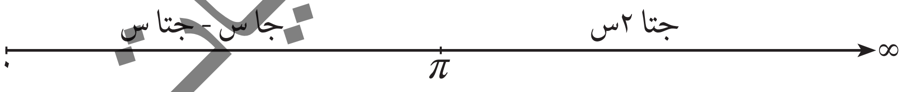
٤- دالة الظل: د(س)= ظاس متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + نπ}، ن ∈ ص

مثال

④ ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [٠ ، ∞[

$$\text{حيث د(س)} = \begin{cases} \text{جا س - جتا س} & \text{لكل } ٠ \leqslant س \leqslant \pi \\ \text{جتا ٢س} & \text{لكل س} > \pi \end{cases}$$

الحل



د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكى نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التى يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

١) د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة]٠، π[

كذلك د(س) = جتا ٢س متصلة على الفترة]π، ∞[

٢) د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = - ١ ، $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ (جا س - جتا س) = - ١

أى أن: د(٠) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠

٣) نبحث اتصال الدالة عندما س = π

د(π) = حاπ - حتاπ = ١

د(π^-) = $\underset{\text{س} \to \pi^-}{\text{نهـــا}}$ (جا س - جتا س) = ١ ، د(π^+) = $\underset{\text{س} \to \pi^+}{\text{نهـــا}}$ جتا ٢س = ١

د(π^-) = د(π^+) ، د(π) = ١ **أى أن:** د(π^-) = د(π^+) = د(π)

∴ متصلة عند س = π **من (١) ، (٢) ، (٣)** الدالة متصلة على [٠ ، ∞[

حاول أن تحل

⑤ ابحث اتصال الدالة د حيث

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ١ + \text{جا س} & ٠ \leqslant \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + (\text{س} - \frac{\pi}{٢})^{٢} & \text{س} \geqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

مثال

⑤ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

أ د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢

ب د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٤}$

ج د(س) = $\frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{س} - ١}$

د د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

الحل

أ د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهى متصلة على ع

ب د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٤}$ دالة كسرية مجال الدالة = ع - {-٤} ، أصفار المقام {-٤}

أى أن الدالة متصلة على ع - {-٤}

ج د(س) = $\frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

∵ جا س، جتا س متصلة على ع ، دالة المقام (س^{٢} - ١) متصلة على ع ، أصفار المقام = {-١ ، ١}

∴ الدالة د متصلة على ع - {-١، ١}

د د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$

دالة البسط: ظا س متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ ص}

دالة المقام: س^{٢} + ١ > ٠ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π، ن ∈ ص}

حاول أن تحل

⑥ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = ٧$

ب $د(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

ج $د(س) = \frac{س^{٣} + ١}{جا\ س}$

د $د(س) = (س + ١)جتا\ س$

لاحظ أن

إذا كانت $د_{١}$، $د_{٢}$ متصلتين على ع فإن:

١- $د_{١} \pm د_{٢}$ متصل على ع

٢- $د_{١} \times د_{٢}$ متصل على ع

٣- $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ تكون متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.

نشاط

⑦ **الربط بالكيمياء**

إذا كان معدل التفاعل فى تجربة كيميائية يعطى بالدالة ر حيث $ر(س) = \frac{٠,٦\ س}{س + ١٢}$ ، س تركيز المحلول.

ابحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:

أ مثل الدالة بيانيًّا بأحد البرامج الرسومية.

ب ابحث اتصال هذه الدالة.

مثال

⑥ بين أن الدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س^{٢} + س + ١}$ متصلة على ع

الحل

حيث أن $س^{٢} + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ع

$(المميز = ب^{٢} - ٤ أ حـ = ١ - ٤ = -٣ < صفر)$

أو $س^{٢} + س + ١ = (س + \frac{١}{٢})^{٢} + \frac{٣}{٤}$ مجموع مربعين

∴ $س^{٢} + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ع

∴ $د(س) = (\sqrt{س^{٢} + س + ١})$ معرفة لجميع قيم س ∈ ع

لكل أ ∈ المجال ع نجد أن $د(أ) = \sqrt{أ^{٢} + أ + ١}$

$\underset{س \to أ}{نهــا}\ د(س) = \underset{س \to أ}{نهــا}\ (\sqrt{س^{٢} + س + ١}) = \sqrt{أ^{٢} + أ + ١}$

∴ $د(أ) = \underset{س \to أ}{نهــا}\ د(س)$ لكل أ ∈ ع

∴ د(س) متصلة على ع

حاول أن تحل

⑧ ابحث اتصال الدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ على مجالها.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

تمارين ٣ – ٦

ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:

① $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \quad س \le ١ \\ ٣س & ، \quad س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

② $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \quad س \le ٢ \\ ٢س - ١ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

③ $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ٢ & ، \quad س \le ٣ \\ س^{٢} - ٢س - ١ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

④ $د(س) = \begin{cases} س + ٤ & ، \quad س < -٢ \\ ١ & ، \quad -٢ \le س < -١ \\ ٢س + ٣ & ، \quad س \ge -١ \end{cases}$ عند س = -٢، عند س = -١

⑤ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} & ، \quad س < ٢ \\ ١ - \dfrac{٣}{س^{٢}} & ، \quad س \ge ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

⑥ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - جتا س}{س} & ، \quad س > ٠ \\ ٢ جا س & ، \quad س \le ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:

⑦ $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$

⑧ $د(س) = \dfrac{-س}{س^{٢} + ١}$

⑨ $د(س) = \dfrac{٣س + ٢}{س^{٢} - ٢س}$

⑩ $د(س) = \dfrac{٢س - ٣}{س^{٢} - ٢س - ١٥}$

⑪ $د(س) = \dfrac{س}{|س| - ٢}$

⑫ $د(س) = \dfrac{|س + ٢|}{(س + ٢)^{٢}}$

⑬ $د(س) = جا س - ٣ جتا (س + ١)$

⑭ $د(س) = س^{٢} + جتا^{٢} س$

⑮ $د(س) = س^{٣} جا ٢س$

⑯ $د(س) = ظا^{٢} س - ١$

⑰ $د(س) = \dfrac{جا^{٢} س + جتا س}{س^{٢} - ٩}$

⑱ $د(س) = \dfrac{ظا س}{س^{٢} - ٩}$

ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:

⑲ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س ظاس + جا^{٢} ٣س}{٥س^{٢}} & ، \quad -\dfrac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ جتا ٢ س & ، \quad ٠ \le س < \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$ على الفترة $[-\dfrac{\pi}{٤} ، \dfrac{\pi}{٤}]$

⑳ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٦} - ١}{س^{٣} - ١} & ، \quad -٤ < س < ١ \\ ٣س - ١ & ، \quad ١ \le س < ٤ \\ س^{٢} & ، \quad ٤ \le س < ٦ \end{cases}$ على الفترة $[-٤ ، ٦]$

أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:

㉑ $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س^{٢} + أس + ٩}$ متصلة على ع

٢٢ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}+٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{أ} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$$ متصلة على ع

أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:

٢٣ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \quad ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} & ، \quad \text{س} \in \text{ع} -]١ ، ٣[\end{cases}$$ متصلة على ع

٢٤ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢\text{ب} & ، \quad \text{س} < -٢ \\ ٣\text{ب س} + \text{جـ} & ، \quad -٢ \leq \text{س} \leq ١ \\ ٣\text{س} - ٢\text{ب} & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$$ متصلة على ع

أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:

٢٥ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \quad \text{س} \geq ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$$ عند س = ٢

٢٦ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}} & ، \quad \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٣}{٥}\,\text{جتا س} & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$ عند س = ٠

٢٧ $$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٥٠} + (\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \quad \text{س} > ٣ \\ \text{جتا}\,(٣ - \text{س}) & ، \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$$ عند س = ٣

٢٨ $$\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$$ عند س = ٣

٢٩ أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: $$\text{د(س)} = \begin{cases} ٢ - \text{س}^{٢} & \text{س} \leq \text{جـ} \\ \text{س} & \text{س} > \text{جـ} \end{cases}$$

ملخص الوحدة

١) مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة $\overline{ع}$ هى ع $\cup$ {- ∞ ، ∞}

أ $\infty + ا = \infty$ **ب** $-\infty + ا = -\infty$ **ج** $\frac{ا}{\infty} = \frac{ا}{-\infty} =$ صفر

د $\infty \times ا = \begin{cases} -\infty \text{ ، إذا كان } ا < ٠ \\ \infty \text{ ، إذا كان } ا > ٠ \end{cases}$ **هـ** $-\infty \times ا = \begin{cases} \infty \text{ ، إذا كان } ا < ٠ \\ -\infty \text{ ، إذا كان } ا > ٠ \end{cases}$

٢) إذا كانت قيمة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما س ⟵ ا من جهة اليمين وجهة اليسار فإن $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل وتقرأ نهاية د(س) عندما تقترب س من ا هى ل.

٣) وجود نهاية الدالة عندما س = ا لا تعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ا، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = ا فهذا لا يعنى بالضرورة وجود النهاية.

٤) $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} (حـ_ن س^ن + حـ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + حـ_٠) = حـ_ن ا^ن + حـ_{ن-١} ا^{ن-١} + ... + جـ_٠$

٥) إذا كانت د(س) = ق(س) لكل س $\in$ ع - {ا} وكان $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ل فإن $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل

٦) إذا كان $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل ، $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = م فإن:

أ $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ ك د(س) = ك.ل. حيث ك $\in$ ع   **ب** $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ [د(س) ± هـ(س)] = ل ± م

ج $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ د(س).هـ(س) = ل.م.   **د** $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

هـ $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} (د(س))^ن = ل^ن$ حيث $ل^ن \in$ ع

و $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ حيث $\sqrt[ن]{ل} \in$ ع

٧) بعض نظريات ونتائج النهايات:

أ $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \frac{س^ن - ا^ن}{س - ا} = ن ا^{ن-١}$ **ب** $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \frac{(س+ا)^ن - ا^ن}{س} = ن ا^{ن-١}$

ج $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}} \frac{س^ن - ا^ن}{س^م - ا^م} = \frac{ن}{م} ا^{ن-م}$

٨) نهاية دالة عند اللا نهاية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^ن} = ٠$ **ب** $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{ا}{س^ن} = ٠$ {حيث ن $\in ع_+$، ا ثابت}

ج $\underset{س \to ا}{\text{نهـا}}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^ن = \infty$

٩) عند إيجاد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

أ النهاية تعطى عددًا حقيقيًا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

ب النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.

ج النهاية تعطى ± ∞ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

١٠) **أ** $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ جا س = جا أ، حيث أ ∈ ع ، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ جتا س = جتا أ حيث أ ∈ ع

ب $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ ظا س = ظا أ حيث أ عدد حقيقي ، أ $\neq \frac{\pi}{٢} + \text{ن}\pi$ لكل ن ∈ ص

ج إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائرى فإن: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ ، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$

د $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}}$ جتا س = ١ ، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = ٠$

١١) يقال إن نهاية د(س) عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتيها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل.

وتكتب رمزيًا: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د (أ^{+}) = د (أ^{-}) = ل حيث:

أ د (أ^{+}) = $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) ، د (أ^{-}) = $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س)

١٢) تكون الدالة د متصلة عندما س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

أ $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) موجودة

ب د(أ) موجودة

ج $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}$ د(س) = د (أ)

١٣) إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب]. تكون الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

أ د(س) متصلة على الفترة]أ ، ب[

ب $\underset{\text{س}\to\text{أ}^{+}}{\text{نهــا}}$ د(س) = د(أ)

ج $\underset{\text{س}\to\text{ب}^{-}}{\text{نهــا}}$ د(س) = د(ب)

١٤) بعض أنماط الدوال المتصلة:

- الدالة كثيرة الحدود متصلة على ع أو على مجال تعريفها.
- الدالة الكسرية متصلة على ع ماعدا أصفار المقام
- دالة الجيب وجيب التمام متصلة على ع
- دالة الظل د(س) = ظاس متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢} + \text{ن}\pi$ ، ن ∈ ص}

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٦ س}}{\text{س}} =$ ……………

(٦ ، π ، ٦π ، ٠)

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{٣ س}} =$ ……………

(٢ ، ٣ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

③ $\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س}} + ٣\right) =$ ……………

(غير موجودة ، ٠ ، ٣ ، ٤)

④ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨} =$ ……………

(٤ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ٠ ، $٦\frac{٢}{٣}$)

⑤ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢} =$

($\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{١}{٧}$ ، -١ ، -٥)

⑥ $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\pi - \text{س}} =$ ……………

(١ ، $\pi^{٢}$ ، π ، $-\pi$)

أوجد النهايات الآتية (إن وجدت):

⑦ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٢٥}$

⑨ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢}$

⑩ $\underset{\text{س}\to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٩}{\text{٢ س} - ٣}$

⑪ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ١}{\text{س}^{٣} - ١}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} - \text{٥ س}}$

⑬ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} - \sqrt{\text{س} + ١٥}}{١ - \text{س}^{٢}}$

⑭ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٢٥ + \text{س}} - ٥}{\sqrt{١ + \text{س}} - ١}$

⑮ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٨ س}^{٢} - \text{٣ جاس}}{\text{س}}$

⑯ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا٢س}}{\text{٣ س}^{٢}}$

⑰ إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{د(س)} - ٥}{\text{س} + ٣} = ٤$ فما قيمة $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

⑱ إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{لكل س} \leqslant ٣ \\ \text{٣ س} - ٧ & \text{لكل س} > ٣ \end{cases}$ فأوجد:

أ $\underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

ب $\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

ج $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \text{د(س)}$

⑲ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + ١}$

⑳ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٤} + ٣}$

㉑ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}^{٤} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ٤}$

㉒ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}^{-١} + ٥}{٧ + ٩\text{س}^{-٢}}$

㉓ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{٣} - \dfrac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ٧}\right)$

㉔ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{س} - ٣}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧}}$

㉕ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \sqrt{٤\text{س}^{٢} - ٣}$

㉖ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س} + ١} - \sqrt{\text{س}}\right)$

٢٧ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س}}{\text{٥س}}$

٢٨ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{٣س}}$

٢٩ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{جا ٣س}}$

٣٠ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٤س}}{\text{٢س}^{٢}}$

٣١ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س - جا ٢س}}{\text{٥س}}$

٣٢ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س} - \pi}{\text{جتا س}}$

٣٣ إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٣}}{\text{جا س}} & \text{لكل س} < ٠ \\ \text{جتا ٣س} & \text{لكل س} > ٠ \end{cases}$ فابحث وجود $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ د(س)}$

٣٤ إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جا (س - ١)}}{\text{س - ١}} & \text{لكل س} > ١ \\ \text{ظا } \frac{\pi}{٤} \text{ س} & \text{لكل س} < ١ \end{cases}$ فابحث وجود $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{ د(س)}$

٣٥ أوجد قيمة الثابت أ لكى يكون للدالة د نهاية عندما س ⟵ ٠

حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{أ + جتا س} & \text{عندما س} < ٠ \\ \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{أ س}} & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$

٣٦ ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = ٥ - |س - ٣| عند س = ٣

٣٧ للدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١} & \text{حيث س} \neq ١ \\ \text{ك} & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$ أوجد قيمة ك؛ لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١

٣٨ أعد تعريف الدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \text{٢س} & \text{لكل س} > ١ \\ \text{٥س - ١} & \text{لكل س} < ١ \end{cases}$ بحيث تصبح متصلة عندما س = ١
إذا كان ذلك ممكنًا.

٣٩ للدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جتا ٢س - ١}}{\text{س}^{٢}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{ك} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة عندما س = ٠

٤٠ ابحث اتصال الدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{١ + جا س} & \text{حيث } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant \frac{\pi}{٢} \\ \text{١ - جتا ٢ س} & \text{حيث س} \geqslant \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ على ع

٤١ إذا كانت الدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{٤س} & \text{حيث س} \leqslant -١ \\ \text{أ س + ب} & \text{حيث } -١ < \text{س} < ٣ \\ \text{-٢س} & \text{حيث س} \geqslant ٣ \end{cases}$

متصلة على ع فما قيمة كل من أ ، ب؟

اختبار تراكمى

أكمل كلًّا مما يأتى:

① $\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦ = (\text{س} - \text{.........})(\text{س} + \text{.........})$

② $\left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} - \text{س}\right)\left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} + \text{س}\right) = \text{.........}$

③ $\dfrac{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} = \text{.........}$

④ $\dfrac{\text{جتا}\,\pi}{\pi} = \text{.........}$

⑤ $\dfrac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٢}} = \text{.........}$

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\text{س} - ٢}{\text{س}} = \text{.........}$

⑦ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}} = \text{.........}$

⑧ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}\,٢\text{س}}{٥\text{س}} = \text{.........}$

⑨ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥}{٤ - ٣\text{س}^{٢}} = \text{.........}$

⑩ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \text{.........}$

احسب النهايات الآتية (إن وجدت):

⑪ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٢\,\text{جا}\,٤\text{س}}{\text{جا}\,٣\text{س}}$

⑫ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٩} - ١}{١ - \text{س}^{٥}}$

⑬ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$

⑭ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢}$

⑮ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ حيث $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{|\text{س} + ١|}$

⑯ $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}} & \text{لكل س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{جا}\,(\pi - \text{س}) & \text{لكل س} > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

⑰ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{لكل س} \neq ٢ \\ \text{جا}\,(\pi - \text{س}) & \text{لكل س} = ٢ \end{cases}$

أ عند س = ٢

ب على ع

⑱ $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$ على ع

⑲ إذا كان $\text{د (س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} & \text{س} > ٢ \end{cases}$ فأوجد

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

ج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

⑳ أوجد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{د (س)}$ لها وجود حيث $\text{د (س)} = \left(\dfrac{١}{\text{س} - ١} - \dfrac{\text{أ}}{\text{س}^{٢} - ١}\right)$

أوجد النهايات الآتية:

٢١ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣س + ٥}{٦س - ٨}$

٢٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٤س^٢ + س}{٢س^٣ - ٥}$

٢٣ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٥س^٣ - ٢س^٢ + ١}{١ - ٣س^٣}$

٢٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢ + ٢}}{٣س - ٦}$

٢٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{٥ س^٣ + ٥س^٢} - س^٣\right)$

٢٦ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^٢ - ٣س} - س\right)$

٢٧ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

أ $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \leqslant ٤ \\ ٧ + \dfrac{١٦}{س} & س > ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

ب $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جا} س}{س} & س > ٠ \\ \dfrac{\text{جا} س}{س} & س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

٢٨ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} -١ & س \neq ٤ \\ ١ & س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & س \neq ٤ \\ -٦ & س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

أ $د(س)$

ب $ر(س)$

ج $د(س) . ر(س)$

د $|د(س)|$

هـ $ر(س) - ٦د(س)$

و $ر(د(س))$

٢٩ أوجد قيم ك التى تجعل الدالة متصلة على ع

أ $د(س) = \begin{cases} ٧س - ٢ & س \leqslant ١ \\ -ك س^٢ & س \geqslant ١ \end{cases}$

ب $د(س) = \begin{cases} ك س^٢ & س \leqslant ٢ \\ ٢س + ك & س > ٢ \end{cases}$

ج $د(س) = \begin{cases} ٩ - س^٢ & س \geqslant -٣ \\ \dfrac{ك}{س^٢} & س < -٢ \end{cases}$

٣٠ أوجد قيمة ك، م التى تجعل الدالة الآتية متصلة على ع

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \geqslant ٢ \\ م(س + ١) + ك & -١ < س < ٢ \\ ٢س^٣ + س + ٧ & س \leqslant -١ \end{cases}$$

٣١ **ادرس اتصال الدالة د:**

أ $د(س) = \dfrac{١}{\sqrt{س - ٢}}$ على مجالها

ب $د(س) = \dfrac{س - ٢}{|س| - ٢}$ على ع

x²
10ˣ
log
eˣ
ln
sin-1
D
cos-1
E
sin
cos
tan-1
F

الوحدة
الرابعة

حساب المثلثات
Trigonometry

مقدمة الوحدة

علم حساب المثلثات Trigonometry هو أحد فروع مادة الرياضيات ، يعتبر قدماء المصريين أول من عملوا بقواعد حساب المثلثات حيث استخدموها في بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، وترجع معرفتنا بحساب المثلثات إلى الأغريق الذين وضعوا قوانينها واستخدموها في إيجاد بعض العلاقات التى تربط بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه، كما ساهم علماء العرب والمسلمين في حل المعادلات المثلثية كما استخدموا المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المسافات والزوايا كما ابتكروا طريقة لإنشاء جداول للجيوب في المثلثات المستوية.

ونشير هنا إلى العالم السويسري ليونارد اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) الذي قدم تعبيرًا جديدًا للدوال المثلثية ، كما استخدم الكثير من الرموز الرياضية التي تساعد في استخدام المسائل الرياضية المتقدمة التي تدرس في جميع المدارس والجامعات حتى الان وسوف نتناول في هذه الوحدة بعض القوانين والعلاقات التى تربط بين أضلاع المثلث وزواياه.

مخرجات تعلم الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذًا للأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث ، والتى تنص على: فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب فى إيجاد أطوال أضلاع أى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث فى إيجاد قياسات زوايا هذا المثلث (يوجد حلان لزاوية مجهولة).
- يستنتج العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ويستخدمها فى حل تمارين متنوعة.
- يستنتج قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد طول ضلع مجهول فى هذا المثلث.
- يستخدم قانون (قاعدة) جيب التمام لأى مثلث فى إيجاد قياس زاوية مجهولة فى هذا المثلث.
- يستخدم قانونا (قاعدتا) الجيب وجيب التمام لأى مثلث فى حل هذا المثلث فى الحالات الآتية:

  إذا علم فى المثلث قياسا زاويتين، وطول أحد أضلاعه.

  إذا علم فى المثلث طولا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

  إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاثة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى حل تمارين وأنشطة متنوعة على قانوني (قاعدتي) الجيب وجيب التمام لأى مثلث.
- يدرس الحالة المبهمة (Ambiguous Case) في حل المثلث كنشاط جماعي وأبحاث علمية.

المصطلحات الأساسية

حساب المثلثات	Trigonometry
قاعدة الجيب	Sine Rule
زاوية حادة	Acute Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle
زاوية قائمة	Right Angle
حالة مبهمة	Ambiguous Case
حلول ممكنة	Possible Solutions
حل وحيد	Unique Solution
أقصر ضلع	Shortest Side
أطول ضلع	Longest Side
مساحة المثلث	Area of The Triangle
أطوال أضلاع المثلث	The Lengths of The Sides of the Triangle
زاوية مقابلة لضلع	Opposite Angle of a Side
أصغر زاوية	Smallest Angle
أكبر زاوية	Largest Angle
قاعدة جيب التمام	Cosine Rule

دروس الوحدة

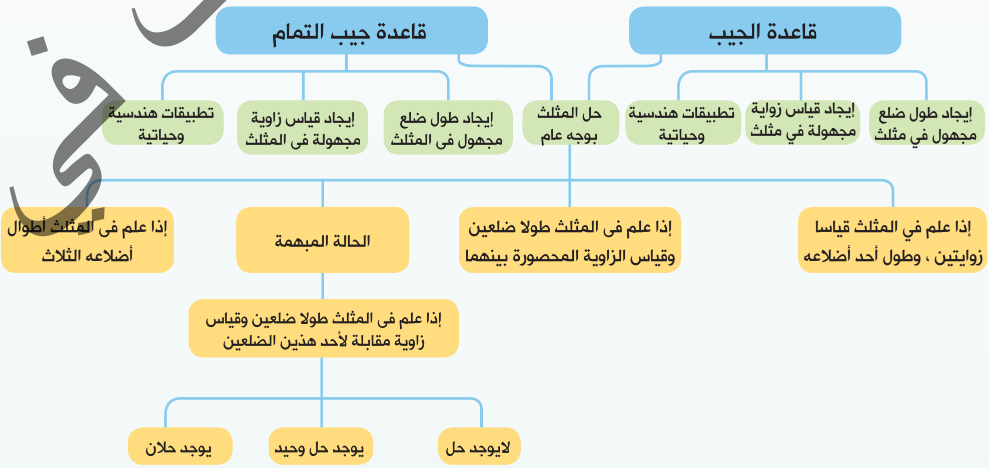
الدرس (١ – ٤): قانون (قاعدة) الجيب.

الدرس (٢ – ٤): قانون (قاعدة) جيب التمام.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة


قاعدة الجيب
قاعدة جيب التمام
إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث
إيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث
تطبيقات هندسية وحياتية
حل المثلث بوجه عام
إيجاد طول ضلع مجهول فى المثلث
إيجاد قياس زاوية مجهولة فى المثلث
تطبيقات هندسية وحياتية
إذا علم في المثلث قياسا زوايتين ، وطول أحد أضلاعه
إذا علم فى المثلث طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما
الحالة المبهمة
إذا علم فى المثلث أطوال أضلاعه الثلاث
إذا علم فى المثلث طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحد هذين الضلعين
لايوجد حل
يوجد حل وحيد
يوجد حلان

٤ - ١

قانون (قاعدة) الجيب

The Sine Rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

المصطلحات الأساسية

حساب المثلثات	Trigonometry
قاعدة الجيب	Sine Rule
زاوية حادة	Acute Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle
زاوية قائمة	Right Angle
حالة مبهمة	The Ambiguous Case

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

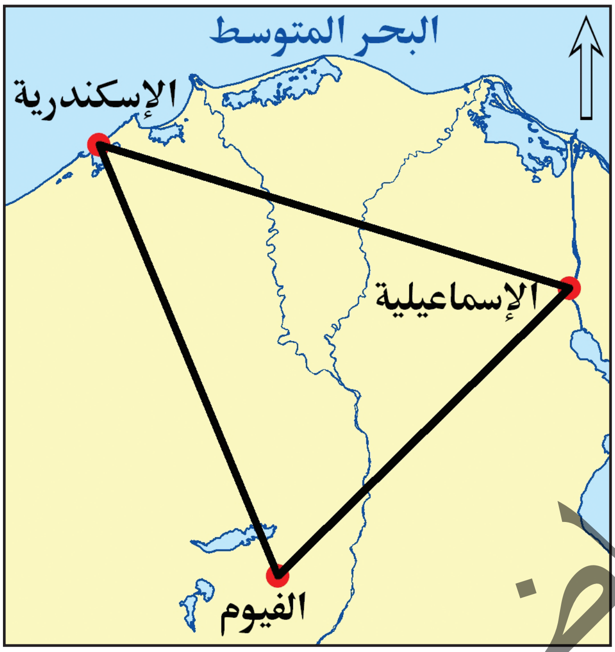
سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين والآن سوف نتعلم طرقًا آخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.

نشاط

أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل.

قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم)

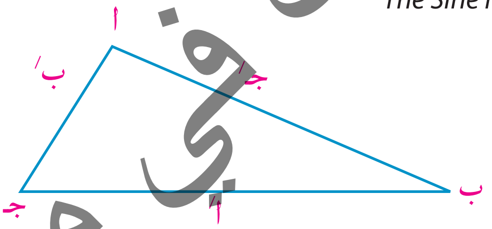
تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة) الجيب.



تعلم

قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*

في المثلث أ ب جـ إذا استخدمنا الرمز أَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ، والرمز بَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب ، والرمز جـَ للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية جـ ، فإنه يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.



أى أن: $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا ا = $\frac{1}{2}$ اَ جـَ جا ب = $\frac{1}{2}$ اَ بَ جا جـ

صيغ مساحات المثلث المتساوية

تذكر أن

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

$$\text{ب}'\text{جـ}'\text{ جا أ} = \text{أ}'\text{جـ}'\text{ جا ب} = \text{أ}'\text{ب}'\text{ جا جـ}$$ بضرب كل عبارة في ٢

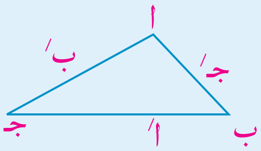
$$\frac{\text{ب}'\text{جـ}'\text{جا أ}}{\text{أ}'\text{ب}'\text{جـ}'} = \frac{\text{أ}'\text{جـ}'\text{جا ب}}{\text{أ}'\text{ب}'\text{جـ}'} = \frac{\text{أ}'\text{ب}'\text{جا جـ}}{\text{أ}'\text{ب}'\text{جـ}'}$$ بقسمة كل عبارة على أ َب َجـ َ

$$\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جـ}'}$$ بالتبسيط

$$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$$ من خواص التناسب

أى أن: في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي : $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

تذكر أن



مساحة المثلث أ ب جـ

$= \frac{1}{2}$ أ َ ب َ جا جـ

$= \frac{1}{2}$ أ َ جـ َ جا ب

$= \frac{1}{2}$ ب َ جـ َ جا أ

تعلم ذاتى: هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك

استخدام قانون (قاعدة) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

مثال

① أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٣٣َ ٥٤ْ، ق(∠ب) = ٢٢َ ٤٩ْ ، أ َ = ١٢٤,٥سم

الحل

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية (التباين في المثلث)

ق(∠جـ) = ١٨٠ْ - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠ْ - [٣٣َ ٤٥ْ + ٢٢َ ٤٩ْ] = ٥َ ٧٦ْ

∴ أكبر طول ضلع هو جـ َ لأنه يقابل أكبر زاوية فى المثلث وهي زاوية جـ

$$\because \frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} \qquad \therefore \frac{١٢٤,٥}{\text{جا }٣٣'\,٥٤^\circ} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا }٥'\,٧٦^\circ}$$

$$\therefore \text{جـ}' = \frac{١٢٤,٥ \text{ جا } ٥'\,٧٦^\circ}{\text{جا }٣٣'\,٥٤^\circ} = ١٤٨,٤ \text{سم}$$

تذكر أن

في أى مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزواية الأكبر قياسًا، ويكون الضلع الأصغر طولًا مقابلًا للزاوية الأصغر قياسًا.

حاول أن تحل

① أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠أ) = ٤٣ْ، ق(∠ب) = ٦٥ْ ، جـ َ = ٨,٤سم

حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the triangle using the sine rule*

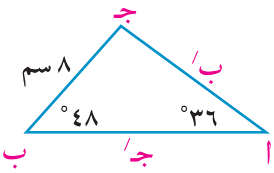
المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:

مثال

② حل المثلث أ ب جـ حيث أ َ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٣٦ْ ، ق(∠ب) = ٤٨ْ

الحل



$\text{ق}(\angle \text{جـ}) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°$

$\because \frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} \qquad \therefore \frac{\text{جا } ٣٦°}{٨} = \frac{\text{جا } ٤٨°}{\text{بَ}}$

$\therefore \text{بَ} = \frac{٨ \text{ جا } ٤٨°}{\text{جا } ٣٦°} \simeq ١٠,١١٤ \text{سم.}$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

ابدأ ← (8 × SIN 4 8) ÷ SIN 3 6 =

$\because \frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جـَ}} \qquad \therefore \frac{\text{جا } ٣٦°}{٨} = \frac{\text{جا } ٩٦°}{\text{جـَ}} \qquad \therefore \text{جـَ} = \frac{٨ \text{ جا } ٩٦°}{\text{جا } ٣٦°} \simeq ١٣,٥٣٥ \text{سم}$

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

إبدأ ← (8 × SIN 9 6) ÷ SIN 3 6 =

ويكون في $\triangle$ أ ب جـ: بَ = ١٠,١١٤ سم ، جـَ = ١٣,٥٣٥ سم ،

٩ حاول أن تحل

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٨سم ، ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (يوجد حلين لزاوية مجهولة)

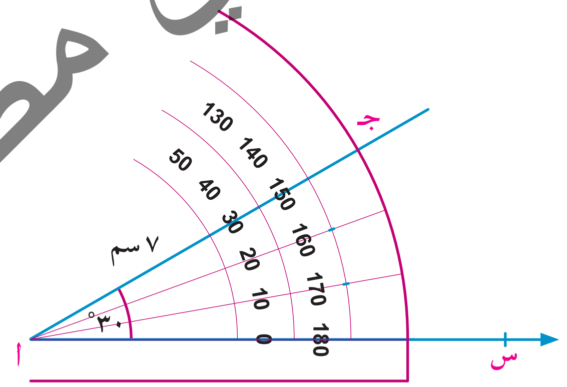
الحالة المبهمة *Ambiguous Case*

ارسم المثلث أ ب جـ (إن أمكن ذلك) حسب القياسات الموجودة في الجدول المقابل:

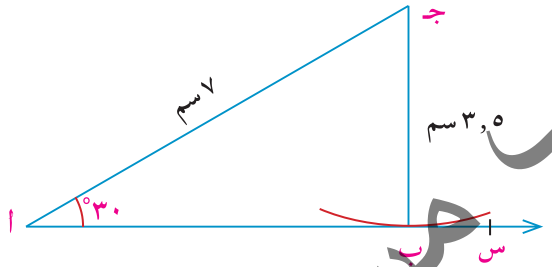
طول $\overline{\text{أ جـ}}$ بالسم	ق(∠أ)	طول $\overline{\text{ب جـ}}$ بالسم
٧	٣٠°	٣,٥
		٥
		٢

١ - من نقطة أ أرسم $\overrightarrow{\text{أ س}}$

٢ - من نقطة أ أرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ بطول ٧سم وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع $\overrightarrow{\text{أ س}}$

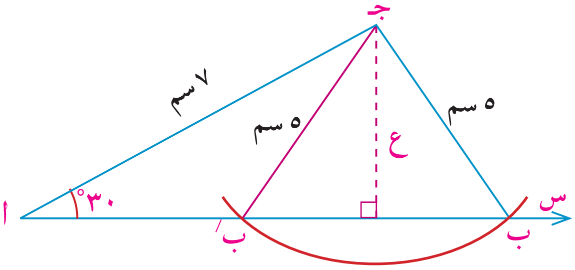


٣ - عندما يكون ب جـ = ٣,٥سم أركز سن الفرجار عند النقطة جـ وبفتحة طولها ٣,٥ سم ارسم قوسًا يمس $\overleftarrow{\text{أ س}}$ في نقطة ب.



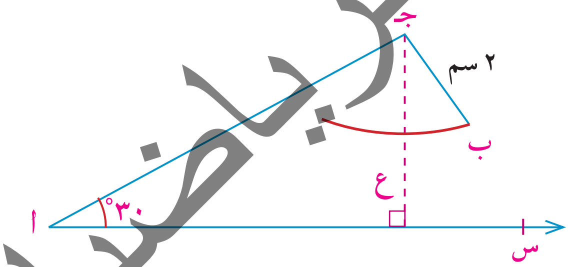
- قس طول $\overline{\text{جـ ب}}$ وقارن طوله مع طول العمود المرسوم من جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ماذا تلاحظ؟

٤ - عندما يكون ب جـ = ٥ سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار ٥سم وارسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{\text{أ س}}$. **ماذا تلاحظ؟**



- قس طول $\overline{\text{جـ ب}}$ ، طول $\overline{\text{جـ بَ}}$ **ماذا تلاحظ؟**
- قارن بين طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول العمود المرسوم من نقطة جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ **ماذا تلاحظ؟**

٥ - عندما يكون ب جـ = ٢سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار ٢سم وارسم قوسًا ، هل يقطع هذا القوس $\overleftarrow{\text{أ س}}$؟

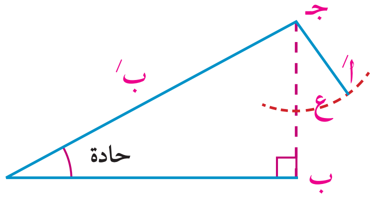


- قارن بين طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول العمود المرسوم من جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ماذا تلاحظ؟

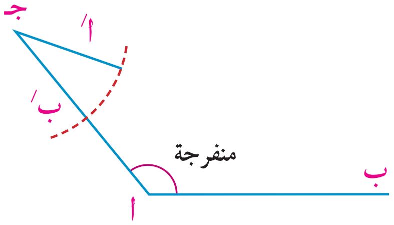
تدريب :

- أعد الخطوات السابقة في حالة ما تكون ∠ جـ منفرجة وبين الحالات المختلفة لرسم المثلث.
- من الخطوات السابقة يمكن استنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أ ب جـ بمعلومية ∠أ، أَ، بَ باعتبار أن ع هو أقصر بعد من جـ إلى $\overline{\text{أ ب}}$

لايوجد حل على الأطلاق

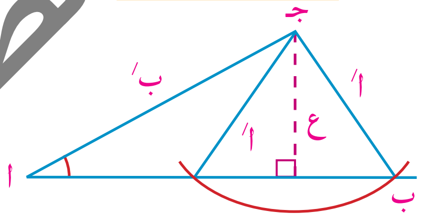


أَ < ع



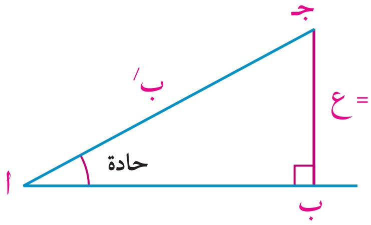
أَ ≤ بَ

يوجد حلان للمثلث

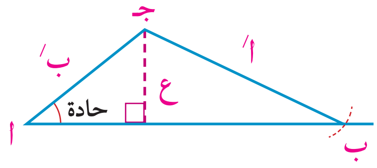


ع < أَ < بَ

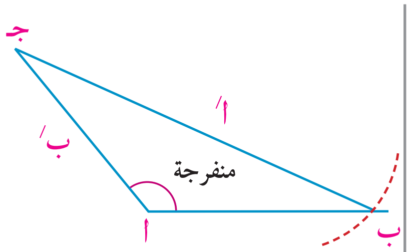
يوجد حل وحيد للمثلث


جـ
بَ
أَ = ع
حادة
ا
ب

أَ = ع


جـ
بَ
أَ
ع
حادة
ا
ب

أَ ≥ بَ


جـ
أَ
بَ
منفرجة
ا
ب

أَ > ب

مثال

تطبيق

③ بين ما إن كان لكل مثلث مما يأتى حل وحيد أو حلان أو ليس له حل. أوجد الحلول الممكنة ثم قرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

أ △ ا ب جـ الذي فيه ق(∠ب) = ١١٠° ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٥سم

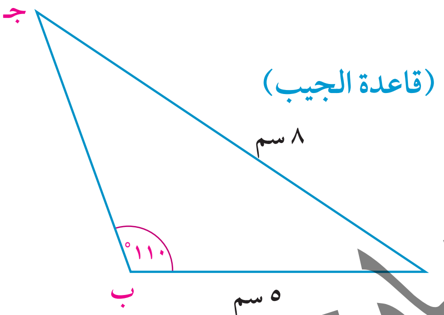
ب △ ى هـ و الذي فيه ق(∠ى) = ٦٠° ، ىَ = ٧سم ، هـَ = ٩سم

جـ △ ل م ن الذي فيه ق(∠ل) = ٤٠° ، لَ = ١٢سم ، مَ = ١٥سم

الحل

أ ∵ ∠ب منفرجة ، بَ > جـَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد


جـ
٨ سم
١١٠°
ب
٥ سم
ا

∵ $\frac{\text{٥}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ١١٠°}}$ **(قاعدة الجيب)**

∴ جا جـ = $\frac{\text{٥ × جا ١١٠°}}{\text{٨}}$ ≃ ٠,٥٨٧٣

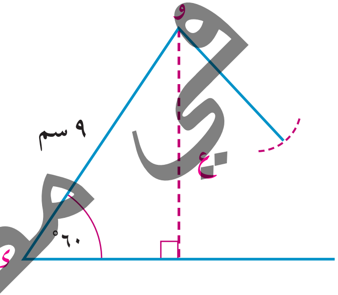
ومنها ق(∠جـ) ≃ ٣٦°

∴ ق(∠ا) ≃ ١٨٠° - (١١٠° + ٣٦°) ≃ ٣٤° ،

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٣٤°}} \simeq \frac{\text{٨}}{\text{جا ١١٠°}}$ ∴ أَ ≃ $\frac{\text{٨ × جا ٣٤°}}{\text{جا ١١٠°}}$ ≃ ٤,٨ سم

أى أن: ق(∠ا) ≃ ٣٤° ، ق(∠جـ) ≃ ٣٦° ، أَ ≃ ٤,٨ سم

ب ∵ ∠ى حادة ، ىَ > هـَ

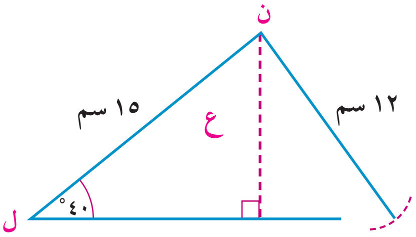


ع = هـَ جا ى = ٩ جا ٦٠ ≃ ٧,٨سم

∵ ىَ > ع (حيث ٧ > ٧,٨)

فلا يوجد حل للمثلث

جـ ∵ ∠ل حادة ، لَ > مَ (حيث ١٢ > ١٥)،

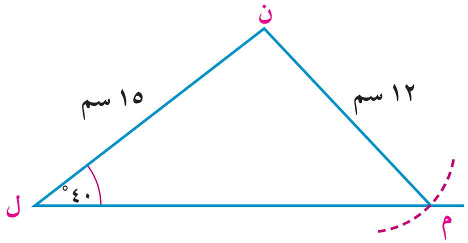

ن
١٥ سم
ع
١٢ سم
٤٠°
ل

ع = ١٥ جا ٤٠ ≃ ٩,٦ سم

∵ ع > لَ > مَ (حيث ٩,٦ > ١٢ > ١٥)

لذلك يوجد للمثلث ل م ن حلان.

الحل الأول: ∠م حادة



∵ $\frac{\text{١٥}}{\text{جا م}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٤٠°}}$

∴ جا م = $\frac{\text{١٥ × جا ٤٠°}}{\text{١٢}}$ جا م ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ٥٣,٤٦°

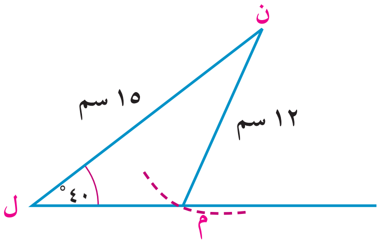
∴ ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - (٤٠° + ٥٣,٤٦°)

≃ ٨٦,٥٤° ،

∵ $\frac{\text{نَ}}{\text{جا ٨٦,٥٤°}} \simeq \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٤٠°}}$

∴ نَ ≃ $\frac{\text{١٢ × جا ٨٦,٥٤°}}{\text{جا ٨٦,٥٤°}}$ ≃ ١٨,٦٣ سم

الحل الثانى: ∠م منفرجة



∵ دالة الجيب موجبة في الربع الثانى ،

جا م ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ≃ ١٨٠° - ٥٣,٤٦° ≃ ١٢٦,٥٤° ،

ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - (٤٠° + ١٢٦,٥٤°)

≃ ١٣,٤٦°

∵ $\frac{\text{نَ}}{\text{جا ١٣,٤٦°}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٤٠°}}$

∴ نَ ≃ $\frac{\text{١٢ × جا ١٣,٤٦°}}{\text{جا ٤٠°}}$ ≃ ٤,٣٥ سم

أى أن: أحد الحلين هو: ق(∠م) ≃ ٥٣,٤٦° ، ق(∠ن) ≃ ٨٦,٥٤° ، نَ ≃ ١٨,٦٣سم

الحل الآخر هو: ق(∠م) ≃ ١٢٦,٥٤° ، ق(∠ن) ≃ ١٣,٤٦° ، نَ ≃ ٤,٣٥سم

حاول أن تحل

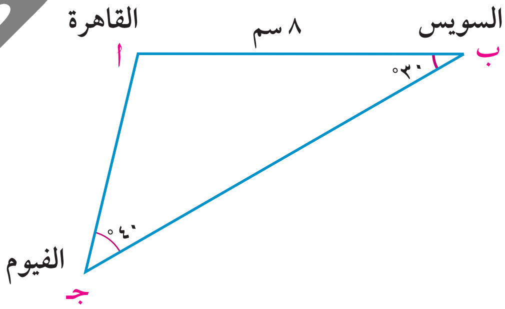
③ بين ما إذا كان لكل مثلث مما يأتى حل وحيد أو حلان أو ليس له حل. أوجد الحلول الممكنة ثم قرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

- أ △ أ ب جـ الذي فيه ق(∠أ) = ١٠٠° ، أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٥سم
- ب △ ء هـ و الذي فيه ق(∠هـ) = ٣٥° ، هـَ = ٩ سم ، وَ = ٥ سم
- جـ △ م ن ل الذي فيه ق(∠م) = ٥٢° ، مَ = ٢١ سم ، نَ = ٢٦ سم

مثال

④ **الربط بالجغرافيا:** الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:

- أ المسافة بين القاهرة والفيوم.
- ب المسافة بين السويس والفيوم.



الحل

ق(∠أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ١١٠°}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ٤٠°}}$

∴ $\text{أ جـ} = \frac{\text{٨ × جا ٣٠°}}{\text{جا ٤٠°}} \simeq \text{٦,٢٢سم}$

∴ المسافة بين القاهرة والفيوم ≃ ٦,٢٢ × ١٦,٧٥ ≃ ١٠٤ كم $\text{ب جـ} = \frac{\text{٨ × جا ١١٠°}}{\text{جا ٤٠°}} \simeq \text{١١,٧سم}$

∴ المسافة بين السويس والفيوم ≃ ١١,٧ × ١٦,٧٥ ≃ ١٩٦ كم

؟ حاول أن تحل

④ في النشاط صفحة (١٥٤):

أ استخدم الأدوات الهندسية لإيجاد قياسات زوايا المثلث والمسافة بين الفيوم والإسكندرية.

ب أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين:

أولًا: الإسماعيلية والفيوم.   **ثانيًا:** الإسماعيلية والإسكندرية.

تطبيقات هندسية لقانون الجيب *Geometrical Applications on the Sine Rule*

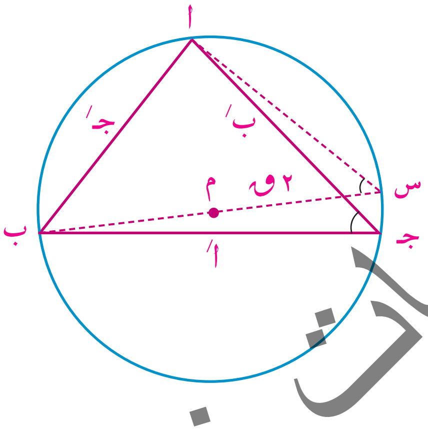
تمرين مشهور

في أي مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

البرهان:-

إذا كانت الدائرة تمر بروؤس مثلث حاد الزوايا



نرسم الدائرة التى تمر بروؤس المثلث ا ب جـ الحاد الزوايا ثم

نرسم القطر $\overline{\text{ب س}}$ والوتر $\overline{\text{س ا}}$

∵ ق(∠ب ا س) = ٩٠°   ،   ق(∠ا س ب) = ق(∠ا جـ ب)

∴ $\text{جا س} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب س}}$ ، $\text{جا جـ} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب س}}$

فيكون ا ب = ب س جا جـ

∴ جـَ = ٢نق جا جـ   **أى أن:** $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$

بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن: $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \text{٢نق}$ ، $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \text{٢نق}$

∴ $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$

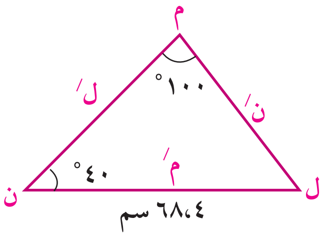
تعلم ذاتي: أثبت القانون السابق إذا كانت الدائرة تمر بروؤس مثلث منفرج الزاوية.

مثال

⑤ مثلث ل م ن فيه مَ = ٦٨,٤سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠° أوجد:

أ لَ   ب طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤس المثلث ل م ن

جـ مساحة سطح المثلث ل م ن



الحل

ق(∠ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

$\frac{\text{ل}'}{\text{جا }٤٠^\circ} = \frac{٦٨,٤}{\text{جا }١٠٠^\circ}$ (قانون الجيب)

ل' = $\frac{٦٨,٤}{\text{جا }١٠٠^\circ}$ × جا ٤٠° ≃ ٤٤,٦٤سم وهو المطلوب (١)

∵ $\frac{\text{م}'}{\text{جا م}}$ = ٢نق ∴ $\frac{٦٨,٤}{\text{جا }١٠٠^\circ}$ = ٢نق

أى أن نق = $\frac{٦٨,٤}{\text{٢ جا }١٠٠^\circ}$ ≃ ٣٤,٧٢ سم وهو المطلوب (٢)

مساحة المثلث ل م ن = $\frac{١}{٢}$ م' ل' جا ن = $\frac{١}{٢}$ × ٦٨,٤ × ٤٤,٦٤ جا ٤٠° = ٩٨١,١ سم^٢

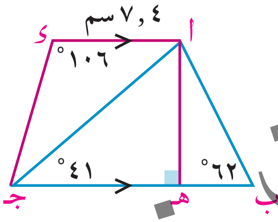
حاول أن تحل

⑤ ا ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٥سم، ق(∠ب) = ٣٥° ١٨َ ،
ق(∠جـ) = ١٠٣° ٤٢َ أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

مثال

⑥ ا ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{\text{اى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، اى = ٧,٤سم، ق(∠ب) = ٦٢°، ق(∠ى) = ١٠٦°،
ق(∠ا جـ ب) = ٤١°. أوجد
أولًا: طول كل من $\overline{\text{ا جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ **ثانيًا:** مساحة سطح شبه المنحرف ا ب جـ ى لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل



فى المثلث ا جـ ى

∵ ق(∠ى ا جـ) = ق(∠ا جـ ب) = ٤١° (بالتبادل)

، ق(∠ا جـ ى) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{\text{ا جـ}}{\text{جا }١٠٦^\circ} = \frac{٧,٤}{\text{جا }٣٣^\circ}$ ∴ ا جـ = $\frac{٧,٤ \times \text{جا }١٠٦^\circ}{\text{جا }٣٣^\circ}$ = ١٣,٠٦سم

في المثلث ا ب جـ ق(∠ب ا جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا }٧٧^\circ} = \frac{١٣,٠٦}{\text{جا }٦٢^\circ}$ ∴ ب جـ = $\frac{١٣,٠٦ \times \text{جا }٧٧^\circ}{\text{جا }٦٢^\circ}$ = ١٤,٤١سم

∵ $\frac{\text{ا هـ}}{\text{ا جـ}}$ = جا ٤١° ∴ ا هـ = ١٣,٠٦ × جا ٤١° = ٨,٥٦٨سم

∵ مساحة سطح شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع.

= $\frac{\text{اى} + \text{ب جـ}}{٢}$ × ا هـ = ($\frac{٧,٤ + ١٤,٤١}{٢}$) × ٨,٥٦٨ = ٩٢,٤٣٤سم^٢ ≃ ٩٢سم^٢

حاول أن تحل

⑥ ا ب جـ ى شكل رباعي فيه جـ ى = ١٠٠سم، ق(∠ب جـ ا) = ٣٦°، ق(∠ب ى ا) = ٥٥°،
ق(∠ب جـ ى) = ٨٥°، ق(∠ا جـ ى) = ٨٧°، أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{ا جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

تمــاريــن ٤ – ١

أكمل كل مما يأتي:

① فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ....

② فى المثلث ا ب جـ إذا كان ٢ جا ا = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن اَ : بَ: جـَ = ...

③ ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠$\sqrt{٣}$سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ...

④ مثلث ا ب جـ فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠جـ) = ٤٠° ، جـَ = ٨,٤سم فإن اَ = ... سم

⑤ في المثلث ا ب جـ يكون $\frac{\text{٢ بَ}}{\text{جا ب}}$ =.....نق

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:–

⑥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ الذى فيه ق(∠ا) = ٣٠° ، اَ = ١٠سم هو:.........

أ ١٠ سم **ب** ٢٠سم **ج** ٥سم **د** ٤٠سم

⑦ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ يساوى ٤سم ، ق(∠ا) = ٣٠° فإن اَ هو:

أ ٤سم **ب** ٢سم **ج** ٤$\sqrt{٣}$ **د** $\frac{١}{١٦}$

⑧ فى المثلث ا ب جـ يكون المقدار ٢ نق جا ا مساويًا:

أ اَ **ب** بَ **ج** حـَ **د** مـ(△ا ب جـ)

◯ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ جا ص}}$ يساوى:

أ نق **ب** ٢نق **ج** $\frac{١}{٢}$ نق **د** ٤نق

◯ △ل م ن فيه، ق(∠ل) = ٣٠°، م ن = ٧سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوى:

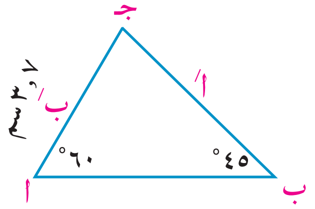
أ ٧ سم **ب** ٣,٥ سم **ج** ١٤سم **د** $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

◯ فى المثلث س ص ع إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ: صَ: عَ تساوى:

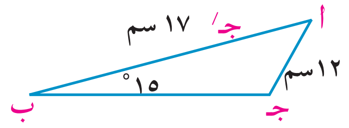
أ ٢: ٣: ٤ **ب** ٦: ٤: ٣ **ج** ٣: ٤: ٦ **د** ٤: ٣: ٦

⑨ **حل كل مثلث مما يلى:**

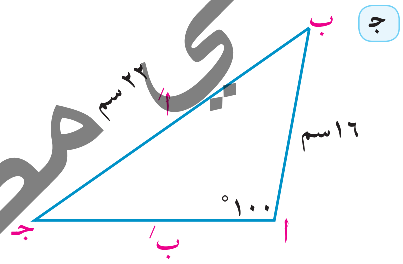
أ



ب



ج



⑩ بين إن كان للمثلث ا ب جـ في كل مما يأتى حل وحيد ، أم حلان ، أم ليس له حل ، أوجد الحلول إن وجدت مقربًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

أ ق(∠ا) = ١٠٥°، اَ = ٨سم ، بَ = ٥سم

ب ق(∠ا) = ٤٧°، اَ = ٤سم، بَ = ٦ سم

ج ق(∠ا) = ٣٨°، اَ = ١٠سم، بَ = ١٤ سم

د ق(∠ا) = ٣٦,٨٧°، اَ = ٦سم،بَ = ١٠ سم

⑪ حل المثلث ا ب جـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

أ ق(∠ا) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٣٠°، بَ = ١٠سم
ب ق(∠ا) = ٥٠°، اَ = ٤سم، بَ = ٣ سم
جـ ق(∠ب) = ٣٣°، بَ = ٧سم، جـَ = ١٠ سم
د ق(∠جـ) = ١١٦°، جـَ = ١٢سم، اَ = ١٠ سم

⑫ حل المثلث ا ب جـ في كل مما يأتي:

أ ق(∠ا) = ٣٢°، اَ = ١٧سم، بَ = ١١سم
ب ق(∠ا) = ٤٩°، اَ = ٣٢سم، بَ = ٣٨سم
جـ ق(∠ب) = ٧٠°، بَ = ١٤سم، جـَ = ١٤سم
د ق(∠جـ) = ١٠٣°، بَ = ٤٦سم، جـَ = ٦١سم

⑬ ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: اَ: بَ: جـَ = $\sqrt{٦}$: ٢: $\sqrt{٣}$ + ١

⑭ ا ب جـ ى متوازى أضلاع فيه ا ب = ١٩,٧٧سم وقطراه $\overline{\text{ا جـ}}$، $\overline{\text{ب ى}}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{\text{ا ب}}$ زاويتين مقدارهما ٢٢ ٣٦َ°، ٥٨ ٤٤َ°، أوجد طولى القطرين.

⑮ ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ٨,٣٥٦سم، ق(∠ا) = ٢٠ ٤١َ°، ق(∠ب) = ١٧ ٥٩َ° أوجد:

أ بَ
ب طول العمود النازل من جـ على $\overline{\text{ا ب}}$

⑯ ا ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{\text{اى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، ا ى = ١٠,٧سم، ق(∠ى) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ١٩ ٦١َ°، ق(∠جـ ا ى) = ٥٠ ٣٣َ°، أوجد طول كل من $\overline{\text{ا جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$

⑰ ا ب جـ ى شكل رباعى فيه ق(∠ب جـ ى) = ٨٥°، ق(∠جـ ى ا) = ٨٧°، ق(∠ب جـ ا) = ٣٦°، ق(∠ب ى ا) = ٥٥° جـ ى = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{ا جـ}}$ لأقرب متر.

⑱ ا ب جـ مثلث فيه جا جـ = ٠,٣٥ ، جـَ = ١٤سم، أوجد بدلالة π مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

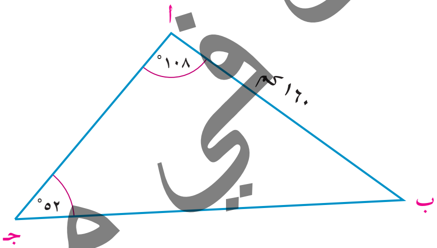
⑲ ا ب جـ مثلث فيه اَ = ٥٨، ق(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من ا على اَ.

⑳ ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ا) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان اَ + بَ = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كل من اَ، بَ

㉑ ا ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان ق(∠ا) = ٤٢°، ق(∠ب) = ٤٨ ٧٤َ°، أوجد أطوال أضلاع المثلث ا ب جـ

㉒ ا ب جـ مثلث فيه جـَ = ١٩سم، ق(∠ا) = ١١٢°، ق(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

㉓ الربط بالجغرافيا: **الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن ا ، ب، جـ**
أوجد لأقرب كيلو متر:



أ المسافة بين ا ، جـ
ب المسافة بين ب ، جـ

㉔ مسألة مفتوحة: ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٥٨°، اَ = ٤٢ سم.
أوجد بَ التى لاتجعل حلًّا للمثلث ا ب جـ عندها. فسر إجابتك

㉕ تفكير ابداعي:

أ في المثلث أ ب جـ أثبت أن: $\frac{\text{٣اَ - ٤بَ}}{\text{٣ جا ا - ٤ جاب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$

ب إذا كانت مـ هى مساحة سطح المثلث ا ب جـ أثبت أن مـ = اَ^{٢} $\left(\frac{\text{جاب جاجـ}}{\text{٢ جا ا}}\right)$

٤ - ٢

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule

سوف تتعلم

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.

المصطلحات الأساسية

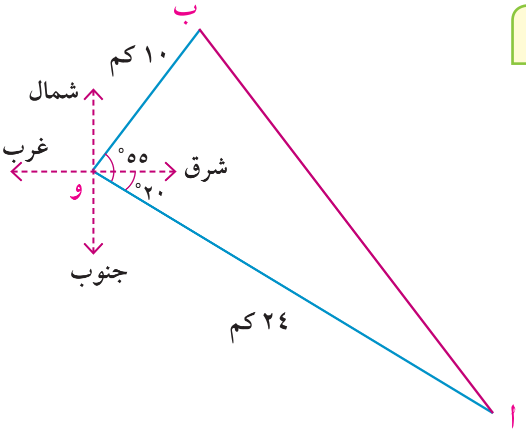
قاعدة جيب التمام	Cosine Rule
زاوية حادة	Acute Angle
زاوية منفرجة	Obtuse Angle
زاوية قائمة	Right Angle

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

Scientific Calculator

فكر و ناقش



تحركت سفينتان أ ، ب في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت أ في اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب في اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

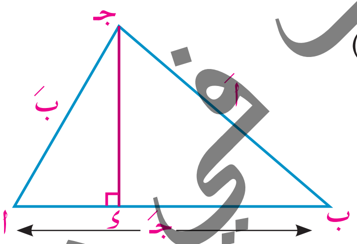
هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟

هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ بمعلومية طول كل من $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.

تعلم

قانون (قاعدة) جيب التمام

The Cosine Rule



في △ ب ء جـ القائم الزاوية في ء:

(ب جـ)^{٢} = (جـ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} **(نظرية فيثاغورث)**

أى أن:

أَ^{٢} = (بَ جا أ)^{٢} + (جـَ - بَ جتا أ)^{٢}

= بَ^{٢} جا^{٢} أ + بَ^{٢} جتا^{٢} أ + جـَ^{٢} -٢ بَ جـَ جتا أ **(بفك الأقواس)**

= بَ^{٢} (جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ) + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ **(بأخذ بَ^{٢} عامل مشترك)**

= بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ **(بالتبسيط)**

ومن ذلك يكون:

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢بَ حـَ}}$$

تذكر أن

متطابقة فيثاغورث

جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١

تعلم ذاتي: أثبت نفس القانون السابق إذا كانت ∠ أ منفرجة في △ أ ب جـ.

تعبير شفهي: اكتب بطريقة مماثلة قيمة كل من بَ^٢ ،جـَ^٢ ، جتا ب ، جتا جـ

تفكير ناقد: هل القانون السابق صحيح إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.

ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:

في أي مثلث أ ب حـ يكون:

$$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ حـَ جتا أ} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ حـَ}}$$

$$\text{بَ}^{٢} = \text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - ٢\,\text{حـَ أَ جتا ب} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا ب} = \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{حـَ أَ}}$$

$$\text{حـَ}^{٢} = \text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - ٢\,\text{أَ بَ جتا حـ} \qquad \text{ومنه} \qquad \text{جتا حـ} = \frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{حـَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ بَ}}$$

ارشاد

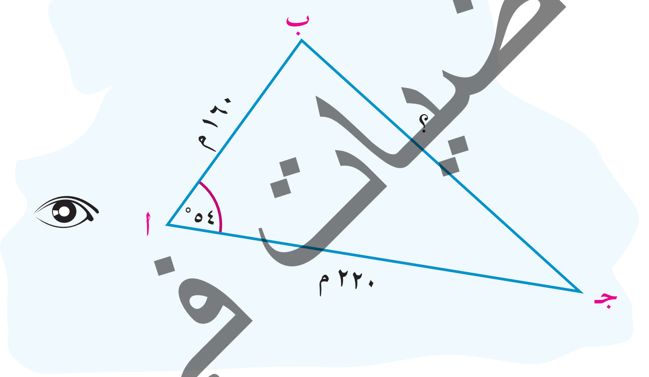
يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أَ ، بَ ، حـَ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

نشاط

أ) استخدام الآلة الحاسبة **في إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.**

أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ مترًا وبعده عن النقطة الثانية (جـ) يساوي ٢٢٠ مترًا، ق (∠ ب أ جـ) = ٥٤°.

استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر .



١ - حدد بدقة البيانات التى رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.

٢ - حدد المطلوب.

٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..

٤ - قس بالسنتيمترات طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

٥ - أوجد الطول الحقيقى للمسافة بين ب، جـ بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتى ب ، جـ؟ وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام القياسات الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

تذكر أن

الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

من النشاط السابق نجد أن:

١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا

٢ - باستخدام القياس: طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٩ سم في الرسم

٣ - طول $\overline{\text{ب جـ}}$ الحقيقي ≃ ٩ × ٢٠ ≃ ١٨٠ كم

٤ - قاعدة جيب التمام هى: أَ^{٢} = بَ^{٢} + حـَ^{٢} - ٢بَحـَ جتا أ

بالتعويض: أَ^{٢} = (١٦٠)^{٢} + (٢٢٠)^{٢} - ٢ × ١٦٠ × ٢٢٠ جتا ٥٤° ≃ ٣٢٦١٩,٩

فتكون: أ ≃ ١٨٠,٦ كم.

٥ – النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٦ – **استخدام الآلة الحاسبة** العلمية في إيجاد الناتج:

ابدأ ↓

1 6 0 χ^2 + 2 2 0 χ^2 − 2 × 1 6 0 ×

2 2 0 × Cos 5 4) = √ =

تطبيق على النشاط: أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

فى △ أ ب جـ الذي فيه:

أ أَ = ٤,٣٦سم ، بَ = ٣,٨٤سم ، ق (∠ جـ) = ١٠١°

ب بَ = ٢سم ، حـَ = ٥سم ، ق (∠أ) = ٦٠°

إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

① أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٤,٦ ، بَ = ٣,٢ ، حـَ = ٢,٨

الحل

∵ أكبر زاوية فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا ∴ ∠أ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢}+\text{حـَ}^{٢}-\text{أَ}^{٢}}{\text{٢بَحـَ}} = \frac{(٣,٢)^{٢}+(٢,٨)^{٢}-(٤,٦)^{٢}}{٢\times ٣,٢\times ٢,٨}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ابدأ ↓

3.2 χ^2 + 2.8 χ^2 − 4.6 χ^2 = ÷ (2 × 3.2 × 2.8)

= Shift Cos = °′″

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أ منفرجة

∴ ق (∠ أ) = ٤٩َ ٥٣َ ٩٩°

حاول أن تحل

① أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ = ١٠سم ، حـَ = ٨سم

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

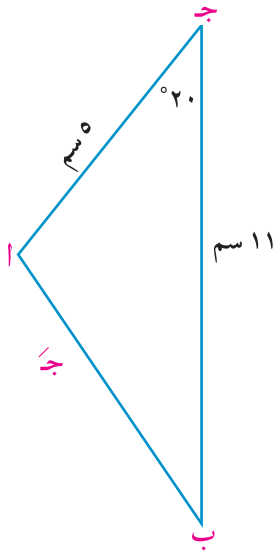
يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

أولًا: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:

Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included

مثال

② حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ= ٥سم ، ق (∠ حـ) = ٢٠°



الحل

يجب إيجاد حـَ ، ق (∠ أ) ، ق (∠ ب)

∵ $\text{حـَ}^{٢} = \text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - ٢\,\text{أَ بَ جتا حـ}$ (قانون جيب التمام)

$= (١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠^\circ$

$\text{حـَ} = \sqrt{(١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ١١ \times ٥ \text{ جتا } ٢٠^\circ} \simeq ٦{,}٥٢٩ \text{ سم}$

$\text{جتا أ} = \dfrac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ حـَ}} = \dfrac{(٥)^{٢} + (٦{,}٥٢٩)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢\,(٥)\,(٦{,}٥٢٩)} \simeq -٠{,}٨١٧$

ق (∠ أ) = ١٤٤ ´٩٤°

ق (∠ ب) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°] = ١٥,٢١٤°

لاحظ أن: فى المثال السابق عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

١- في حالة استخدام قانون الجيب:
- فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:
- إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.
- يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.

ارشاد

يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) بعد إيجاد حـَ، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

حاول أن تحل

② حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٢٤,٦سم ، حـَ= ١٤,٢سم، ق (∠ ب) = ١٨ ´٤٢°

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال

③ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٩سم ، بَ = ٧سم ، حـَ = ٥سم.

الحل

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ ، ب ، حـ

$$\because \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}} = \frac{٧^{٢} + ٥^{٢} - ٩^{٢}}{٢ \times ٧ \times ٥} = -١{,}٠$$

$$\text{ق}(\angle \text{أ}) \simeq ٩٥^{\circ}\,٤٤'\,٢١''$$

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{حـَ}\,\text{أَ}} = \frac{٥^{٢} + ٩^{٢} - ٧^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٩} \simeq ٠{,}٦٣٣$$

$$\text{ق}(\angle \text{ب}) \simeq ٥٠^{\circ}\,٤٢'\,١٣''$$

$$\text{ق}(\angle \text{حـ}) = ١٨٠^{\circ} - [\text{ق}(\angle \text{أ}) + \text{ق}(\angle \text{ب})] = ٣٣^{\circ}\,٣٣'\,٢٦''$$

حاول أن تحل

③ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤سم ، حـَ = ٢١,١سم

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

مثال حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

○ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٦سم ، بَ = ٧سم ، ق (∠ أ) = ٣٠°

تذكر أن

$$(\text{جتا } ٣٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٢})$$

الحل

المطلوب إيجاد حـَ ، ق (∠ ب) ، ق (∠ حـ)

$$\because \text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}\ \text{جتا أ} \qquad \text{(قانون جيب التمام)}$$

$$٦^{٢} = ٧^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - ٢ \times ٧\ \text{حـَ}\ \text{جتا } ٣٠^{\circ}$$

$$٠ = \text{حـَ}^{٢} - ٧\sqrt{٣}\ \text{حـَ} + ١٣ \qquad \text{أي} \qquad \text{حـَ}^{٢} - ٧\sqrt{٣}\ \text{حـَ} + ١٣ = ٠$$

$$\therefore \text{حـَ} = \frac{١}{٢}\left(٧\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٧\sqrt{٣})^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٣}\right) \qquad \text{(القانون العام لحل المعادلة التربيعية)}$$

$$\therefore \text{حـَ} = ١٠{,}٩٣٥ \quad \text{أو} \quad ١{,}١٨٨$$

كل قيمة موجبة لـ حـَ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد جتا ب فإنه:

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{حـَ}\,\text{أَ}}$$

عندما حـ/ = ١٠,٩٣٥

جتا ب$_١$ = $\frac{(١٠,٩٣٥)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢ (١٠,٩٣٥) (٦)}$

جتا ب$_١$ = ٠,٨١٢

ق (∠ ب$_١$) = ٣٥,٦٨٥°

≃ ٣٥° ٤١َ ٦ً

ق (∠ حـ$_١$) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ ب$_١$)]

≃ ١١٤,٣١٤°

≃ ١١٤° ١٨َ ٥٠ً

عندما حـ/ = ١,١٨٨

جتا ب$_٢$ = $\frac{(١,١٨٨)^٢ + (٦)^٢ - (٧)^٢}{٢ (١,١٨٨) (٦)}$

جتا ب$_٢$ = - ٠,٨١٢

ق (∠ ب$_٢$) = ١٤٤,٣١٤°

≃ ١٤٤° ١٨َ ٥٠ً

ق (∠ حـ$_٢$) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ ب$_٢$)]

≃ ٥,٦٨٥°

≃ ٥° ٤١َ ٦ً

تفسير: في أحد المثلثين حـَ = ١٠,٩٤، ق (∠ ب) = ٣٥° ٤١َ ٦ً ، ق (∠ حـ) = ١٤٤° ١٨َ ٥٠ً، وفي المثلث الآخر حـَ = ١,١٩ ، ق (∠ ب) = ١٤٤° ١٨َ ٥٠ً ، ق (∠ حـ) = ٥° ٤١َ ٦ً. قارن هذه النتائج مع النتائج التي حصلنا عليها في المثال رقم (٣) من الدرس الأول (ص١٥٨) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

حاول أن تحل

○ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٨,٦سم، بَ = ١١,١سم ، ق (∠ أ) = ٦٣°

تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام *Geometric Applications on the Cosine Rule*

مثال

○ أ ب حـ مثلث فيه أَ = ٦٣سم ، بَ - حـَ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من بَ ، حـَ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل

∵ أَ + بَ + حـَ = ١٤٠ (محيط المثلث) ، أَ = ٦٣

∴ بَ + حـَ = ١٤٠ - ٦٣ أي بَ + حـَ = ٧٧ (١)

∵ بَ - حـَ = ٢٧ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

٢ بَ = ١٠٤ أي أن بَ = ٥٢ سم

بالتعويض في ١ ينتج أن حـَ = ٢٥سم

ونلاحظ أن حـَ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب حـ

∴ ∠ حـ هي أصغر زوايا المثلث أ ب حـ

∴ جتا حـ = $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - حـَ^٢}{٢أَ بَ}$ = $\frac{(٦٣)^٢ + (٥٢)^٢ - (٢٥)^٢}{٢ \times ٦٣ \times ٥٢}$ = ٠,٩٢٣٠٧٦٩

∴ ق (∠ حـ) = ٢٢° ٣٧َ

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٦٣ × ٥٢ × جا ٣٧° ٢٢َ ≃ ٦٣٠سم^{2}

حاول أن تحل

○ △ أ ب حـ فيه بَ = ٤سم، أَ + حـَ = ١١سم ، أَ - حـَ = ١سم ،أثبت أن ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)، ثم أوجد محيط المثلث أ ب حـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

مثال

○ أ ب حـ ى شكل رباعي فيه أ ب = ٢٢سم ، ق (∠ أ ى ب) = ٦٥° ، ق (∠ ى ب أ) = ٥٠° ، ب حـ = ٢٥سم، ى حـ = ١٨سم، أوجد: ق (∠ حـ ب ى) ، ق (∠ ب حـ ى)

الحل

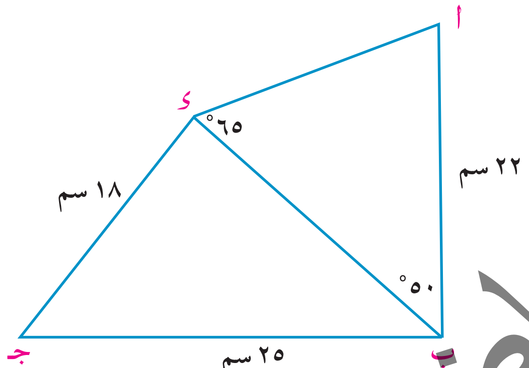
في △ أ ب ى

ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)

= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ى) = ٦٥°

∴ أ ب = ب ى = ٢٢سم



في △ ى ب حـ

جتا(∠ ى ب حـ) = $\frac{(\text{ب ى})^2 + (\text{ب حـ})^2 - (\text{ى حـ})^2}{2\,(\text{ب ى})\,(\text{ب حـ})}$

= $\frac{(22)^2 + (25)^2 - (18)^2}{2 \times 22 \times 25}$ ≃ ٠,٧١٣٧

∴ ق (∠ ى ب حـ) ≃ ٤٤° ٢٨َ ٦َ

جتا(∠ ب حـ ى) = $\frac{(\text{ب حـ})^2 + (\text{حـ ى})^2 - (\text{ب ى})^2}{2\,(\text{ب حـ})\,(\text{حـ ى})}$ = $\frac{(25)^2 + (18)^2 - (22)^2}{2 \times 25 \times 18}$ ≃ ٠,٥١٦٧

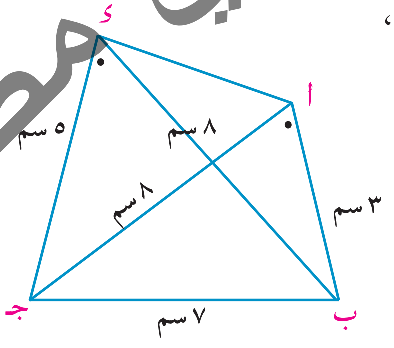
∴ ق (∠ ب حـ ى) ≃ ٥٨° ٥َ ٢٨َ

حاول أن تحل

○ أ ب حـ ى شكل رباعي فيه ق (∠ ى أ ب) = ق (∠ ى ب حـ) = ٩٠° ، ب ى = ١٠سم ، أ ى = ٨سم ، ق (∠ ى حـ ب) = ٣٠° ، أوجد أ حـ لأقرب سنتيميتر.

مثال

④ أ ب حـ ى شكل رباعي فيه أ ب = ٣سم ، أ حـ = ٨سم ، ب حـ = ٧سم ، حـ ى = ٥سم ، ب ى = ٨سم ، أثبت أن الشكل أ ب حـ ى رباعي دائري.



الحل

في △ ا ب حـ

$$\text{جتا ا} = \frac{\text{ب}^{\prime 2} + \text{حـ}^{\prime 2} - \text{ا}^{\prime 2}}{\text{٢ ب}^{\prime}\text{حـ}^{\prime}} = \frac{(٨)^٢ + (٣)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٣} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق (∠ ا) = ٦٠° **(١)**

في △ ب ى حـ

$$\text{جتا ى} = \frac{(\text{حـ ى})^٢ + (\text{ى ب})^٢ - (\text{ب حـ})^٢}{٢\,(\text{حـ ى})\,(\text{ى ب})} = \frac{(٥)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق (∠ ى) = ٦٠° **(٢)**

∵ ق (∠ ب ا حـ) = ق (∠ ب ى حـ) وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل ا ب حـ ى **رباعي دائري**. (وهو المطلوب).

حاول أن تحل

④ ا ب حـ ى شكل رباعي فيه ا ب = ٩سم ، ب حـ = ٥سم ، حـ ى = ٨سم ، ى ا = ٩سم ، ا حـ = ١١سم. أثبت أن الشكل ا ب حـ ى رباعي دائري.

تمـــارين ٤ – ٢

أكمل كلًّا مما يأتى:

① يستخدم .... لحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

② يستخدم .... لحل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع فيه

③ فى أى مثلث ل م ن يكون: $\text{ل}^{\prime 2} = \text{م}^{\prime 2} + \text{ن}^{\prime 2} -$ .... ، $\text{جتا ل} = \frac{\text{م}^{\prime 2} + \text{ن}^{\prime 2} - ......}{......}$

④ في المثلث ا ب جـ ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ....°

⑤ مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧,٥سم ، ٧,٤سم، ٤,٣سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ....°

⑥ △ س ص ع فيه س َ = ١٠ سم ، ص َ = ٦سم ، ق (∠ ع) = ٦٠° فإن ع َ = ...

⑦ فى △ ل ك م يكون $\text{ك}^{\prime 2} + \text{م}^{\prime 2} - \text{ل}^{\prime 2} =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

⑧ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٦٠° د ٣٠°

⑨ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{ل}^{\prime 2} + \text{م}^{\prime 2} - \text{ن}^{\prime 2}}{\text{٢ ل}^{\prime}\text{م}^{\prime}}$ مساويًا:

أ جتا ل ب جتا م جـ جتا ن د لا شئ مما سبق

١٠ في المثلث س ص ع يكون صَ٢ + عَ٢ - سَ٢ = ٢ صَ عَ × .....

أ جتا س　　ب جا ع　　ج جتا ع　　د جا س

١١ فى المثلث أ ب جـ ، أَ : بَ : جـَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن جتا أ تساوى

أ $\frac{١}{٨}$　　ب $-\frac{١}{٨}$　　ج $\frac{١}{٤}$　　د $\frac{٣}{٤}$

أجب عن الاسئلة الآتيه:

١٢ بين إذا كان للمثلث في كل مما يأتى حل وحيد، أم حلان ، أم ليس له حل. أوجد الحلول مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

أ أَ = ٤سم، جـَ = ١٦سم، ق(∠جـ) = ١١٥°

ب أَ = ١٢ سم، جـَ = ٧سم، ق(∠ أ) = ٢٧°

ج أَ = ٥سم، جـَ = ١٢سم، ق(∠ أ) = ٦٥°

د أَ = ١٤ سم، بَ = ١٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°

١٣ فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

أ أَ = ٥سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ٨سم　**فأثبت أن** ق(∠ب) = ٦٠°

ب أَ = ٣سم ، بَ = ٥سم ، جـَ = ٧سم　**فأثبت أن** ق(∠جـ) = ١٢٠°

ج أَ = ١٣سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ١٣سم　**فأوجد** ق(∠جـ)

د أَ = ١٣سم ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٧سم　**فأوجد** ق(∠أ)

هـ أَ = ١٠سم ، بَ = ١٧سم ، جـَ = ٢١سم　**فأوجد** قياس أصغر زاوية فى المثلث

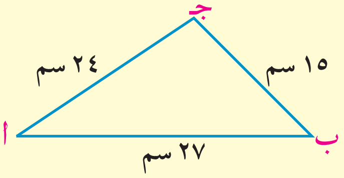
و أَ = ٥سم ، بَ = ٦سم ، جـَ = ٧سم　**فأوجد** قياس أكبر زاوية فى المثلث

ز أَ = ١٧سم ، بَ = ١١سم ، ق(∠جـ) = ٤٢°　**فأوجد** جـَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

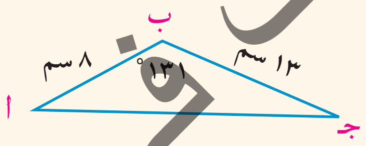
ح بَ = ١٦ ،جـَ = ١٤ ، ق(∠أ) = ٧٢°　**فأوجد** أَ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

١٤ في التمارين من (أ إلى د) حل المثلث أ ب جـ:

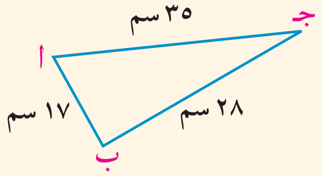
أ



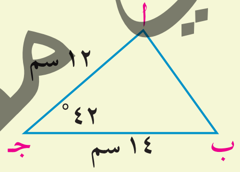
ب



ج



د



١٥ في التمارين من (أ إلى هـ) هل يمكن تكوين مثلث أ ب جـ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

أ ق(∠أ)= ٥٥° ، بَ = ١٢سم ، جـَ = ٧سم

ب أَ = ٣,٢سم ، بَ = ٧,٦٣سم ، جـَ = ٦,٤سم

ج أَ = ١٢سم، بَ = ٢١سم ، ق(∠جـ) =٩٥°

د أَ = ١سم، بَ = ٥سم، جـَ = ٤سم

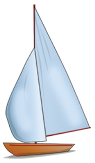
هـ ق(∠أ)= ٤٢° ، أَ = ٧سم ، بَ = ١٠سم

تطبيقات هندسية:

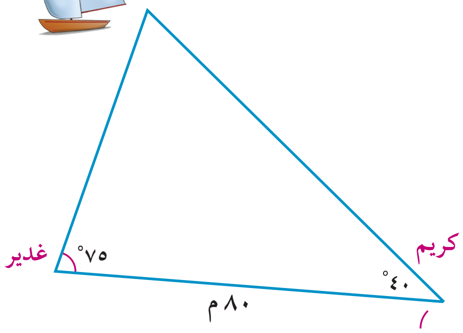
١٦ متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨سم، ٢٦سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

١٧ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ى = ٨سم، أ ى = ٩سم، أ جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

١٨ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ١٣سم
أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$



١٩ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم، أَ = ٢٦سم، ق(∠ أ) = ٦٠°
، أوجد مساحة سطحه.



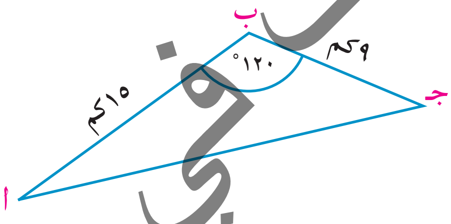
٢٠ **الربط بالملاحة البحرية:** يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟ قرب إجابتك لأقرب متر.

٢١ **الربط بالزراعة:** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨م، ٦٤ م، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج؟

٢٢ **البرهنة النظرية:** أ ب جـ مثلث فيه ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أن: (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٢ (أ ى)^{٢} + ٢ (ب ى)^{٢}،
و إذا كان: أ ب = ٥سم، أ جـ = ٨سم، ب جـ = ١٢ سم أوجد أ ى.

٢٣ **البرهنة النظرية (للمتفوقين):** في المثلث أ ب جـ إذا كان: (أَ +بَ+جَ) (أَ + بَ - جَ) = ك أَ بَ
فاثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤[، ثم أوجد ق(∠ جـ) عندما ك = ١

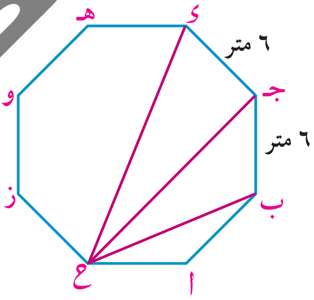
تطبيقات حياتية:



٢٤ **مسافات:** يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة جـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة أ بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. **أوجد:**

أ المسافة بالكيلو متر بين المدينة جـ، المدينة أ

ب الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.



٢٥ **التصميم المعمارى:** صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار $\overline{\text{ع ب}}$ ، $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ع ى}}$.

٢٦ **اكتشف الخطأ:** أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧سم، بَ = ١٠ سم، جَ = ٥سم
ق(∠ أ) = ٤١,٦٢°. أوجد ق(∠ ب)

حل زياد

$\because \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}}$

$\therefore \frac{١٠}{\text{جا ب}} = \frac{٧}{\text{جا } ٤١{,}٦٢}$

$\therefore \text{جا ب} = \frac{١٠ \text{ جا } ٤١{,}٦٢}{٧} \simeq ٠{,}٩٤٨٨$

$\therefore \text{ق}(\measuredangle \text{ب}) = ٧١{,}٥٩^\circ$

حل كريم

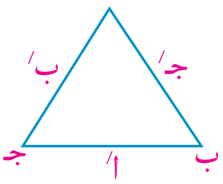
$\because \text{جتا ب} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{٢ \text{ أ}' \text{ جـ}'}$

$\therefore \text{جتا ب} = \frac{(٧)^{٢} + (٥)^{٢} - (١٠)^{٢}}{٢ \times ٧ \times ٥} \simeq -٠{,}٣٧١٤$

$\therefore \text{ق}(\measuredangle \text{ب}) \simeq ١١١{,}٨^\circ$

ملخص الوحدة

١ **قانون (قاعدة) الجيب:** فى أى مثلث، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها



أى أنه فى أى مثلث أ ب جـ يكون:

- $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = ٢ \text{ نق}$

(حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ)

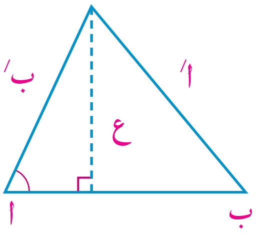
وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) فى حل المثلث فى الحالات التالية:

- إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.
- إذا علم طولا ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

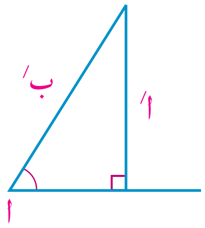
٣ **تحديد عدد المثلثات والحالة المبهمة:**

الحالة المبهمة: التي يكون معلومًا فيها طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

وبفرض أن طولا الضلعين هما أ َ، ب َ والزاوية الحادة أ ، ارتفاع المثلث ع = ب َ جا أ فإن:

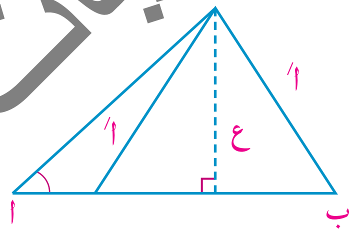


$\text{أ}' \geqslant \text{ب}'$



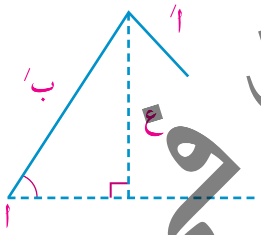
$\text{أ}' = \text{ع}$

مثلث وحيد



مثلثان

$\text{ع} < \text{أ}' < \text{ب}'$



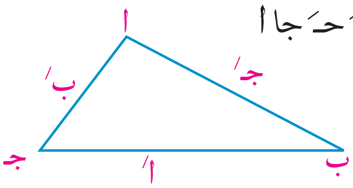
لايوجد مثلث

$\text{أ}' < \text{ع}$

مساحة سطح أى مثلث = **نصف حاصل ضرب طولى أى ضلعين متجاورين** × **جيب الزاوية المحصورة بينهما**

مساحة سطح المثلث أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \text{ أ}' \text{ ب}' \text{ جا جـ} = \frac{١}{٢} \text{ أ}' \text{ جـ}' \text{ جا ب} = \frac{١}{٢} \text{ ب}' \text{ جـ}' \text{ جا أ}$

قانون (قاعدة) جيب التمام: ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:



فى أى مثلث أب جـ يكون

$\text{أ}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - ٢\text{ب}' \text{ جـ}' \text{ جتا أ}$ ومنه $\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢ \text{ ب}' \text{ جـ}'}$

ب َ^٢ = جـ َ^٢ + أ َ^٢ - ٢جـ َ أ َ جتا ب   ومنه $\text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢ جـَ أَ}}$

جـ َ^٢ = أ َ^٢ + ب َ^٢ - ٢أ َ ب َ جتا جـ   ومنه $\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{\text{٢ أَ بَ}}$

استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلثات: يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم:

- طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أطوال أضلاعه الثلاثة.
- طولا ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلاً للحالة المبهمة، والتى سبق دراستها فى قانون الجيب ، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام ، نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الممكنة الناتجة.

تمـــارين عامة

أكمل كل مما يأتى:

① فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاعه مع.............

② يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى إيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علمت.............أو.............

③ أكبر ضلع طولاً فى المثلث يقابل.............

④ يمكن استخدام قانون الجيب فى إيجاد طول أى ضلع فى المثلث إذا علم.............

⑤ حل المثلث يعنى إيجاد.............و.............بشرط أن يكون معلوم منها.............عناصر أحدها على الأقل.............

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

⑥ فى المثلث س ص ع إذا كان س َ = ١٥سم ، ص َ = ٢٥ سم ، ع َ = ٣٥ سم فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث تساوى:

أ ١٥٠°   ب ١٢٠°   جـ ٤٠°   د ٩٠°

⑦ في المثلث اب جـ إذا كان أ َ = ٤سم ، ب َ = ٧سم ، ق(∠جـ) = ١٢٠° ، فإن مساحة المثلث أ ب جـ تساوى:

أ ١٤ سم^٢   ب ٧ $\sqrt{٣}$ سم^٢   جـ ٢٨سم^٢   د ٧ $\sqrt{٢}$ سم^٢

⑧ س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى:

أ ٥سم   ب ١٠ سم   جـ ١٥سم   د ٢٠ سم

⑨ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٥سم ، ق(∠أ) = ٣٠° فإن أ َ يساوى:

أ ٥سم   ب ١٠ سم   جـ ١٥سم   د ٢٠ سم

⑩ س ص ع مثلث فيه ص=١٢,٦سم، ق(∠س) = ٧١° ٤٨َ ، ق(∠ع) = ٤٨° ١٢َ أوجد س َ، ع َ

⑪ أ ب جـ مثلث فيه جـ َ = ١٦,٢سم ، ق(∠أ) = ٣٣° ١٨َ ، ق(∠ب) = ٤٣° ١٢َ ، أوجد قيمة كل من أ َ ، ب َ وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب جـ.

⑫ أوجد محيط المثلث أ ب جـ ، الذى فيه حـ َ = ٨,٧سم ، ق(∠أ) = ٥٧° ١٣َ ، ق(∠ب) = ٦٤° ١٨َ

⑬ أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ والذى فيه أ َ = ٦سم ، ق(∠أ) = ٦٠° مقربًا الناتج لأقرب عدد صحيح.

⑭ أ ب جـ مثلث فيه أ جـ = ٤,٧ سم ، ق(∠ب) = ٣٤°، ق(∠جـ) = ٦٦°، أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ثم أوجد محيط الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ.

⑮ إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٤٠سم ، ق(∠أ) = ٤٤°، ق(∠ب) = ٦٦°، فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ.

⑯ أ ب جـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠سم^{٢} ، ق(∠ب) = ٨٢°، ق(∠جـ) = ٥٦° فما قيمة أَ؟

⑰ البرهنة النظرية: فى أى مثلث أ ب جـ، أثبت أن مساحته تساوى $\frac{\text{أَ بَ جَ}}{\text{٤ نق}}$ حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

⑱ أوجد قياس أكبر زوايا المثلث أ ب جـ إذا كان أَ = ٦سم ، بَ = ١٠ سم ، جَ = ١٤سم

⑲ أوجد قياس أصغر زوايا المثلث أ ب جـ ، إذا كان أَ = ٧سم ، بَ = ٥ سم ، جَ = ١٠سم

⑳ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ، الذى فيه أَ = ٧,٦سم، بَ = ٥,٨ سم، جَ = ٣,٤سم

㉑ في المثلث أ ب جـ، أَ = ١٢ سم، بَ = ١٣سم، جَ = ١٠سم، أوجد ق(∠أ) لأقرب دقيقة ، ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

㉒ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٣ سم، بَ = ١٤سم، جَ = ١٥سم ، أوجد ق(∠ ب)، ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر مربع.

㉓ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ جـ) = ٢٣َ ٩٦°، أَ = ٧سم ،بَ = ٩سم أوجد:

أ جَ
ب مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سم^{٢}
ج طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر.

㉔ أ ب جـ مثلث محيطه ٥٢سم، أَ = ١٣سم، بَ = ١٧سم، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث، ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

㉕ حل △ أ ب جـ إذا كان:

أ أَ = ١٢سم ، ق(∠ب) = ٥٩°، ق(∠جـ) = ٧٣°
ب ق(∠أ) = ٣٥َ ٧٥° ، أَ = ٧ سم ، بَ = ٥,٦سم
ج ق(∠أ) = ١٠َ ٧٣° ، أَ = ١٣٥° ، جَ = ١٧١سم
د ق(∠ب) = ٣٦° ، بَ = ٥,٣٧سم ، جَ = ٤سم
هـ ق(∠أ) = ١٢َ ١٥٣° ، بَ = جَ = ٦ سم
و أَ = ٥سم ، بَ = ٨سم ، جَ = ٧سم
ز ق(∠أ) = ٦٠° ، بَ = ٨سم ، جَ = ١٥سم
ح أَ = ١٤سم ، ق(∠ب) = ٥٣°، جَ = ١٢سم
ط أَ = ١١سم ، بَ = ٩سم ، ق(∠جـ) = ١٢َ ٤٣°

البرهنة النظرية

㉖ فى أى مثلث أ ب جـ أثبت أن:

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَ^{٢} - ٢بَ جَ جتا أ و إذا كان أَ = ٤سم ، بَ = ٥سم ، جَ = ٦سم، أثبت أن جتا جـ = جتا٢ أ

ثم أثبت أن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١٥\sqrt{٧}}{٤}$ سم^{٢}

تطبيقات هندسية:

٢٧ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٦°، ق(∠ ى ب أ) = ٤٤°، أوجد طول القطر $\overline{\text{أ جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

٢٨ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه جـ ى = ١٠٠سم، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ ب ى أ) = ٥٥°، ق(∠ ب جـ ى) = ٨٥°، ق(∠ جـ ى أ) = ٨٧°، أوجد طولى $\overline{\text{ب ى}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

٢٩ أ ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، أ جـ = ١٥سم، ق(∠ ى) = ١١٨°، ق(∠ ب) = ٦٤°، ق(∠ جـ أ ى) = ٢٤° أوجد لأقرب عددين عشريين.

أ طول كلًا من $\overline{\text{أ ى}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

ب مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ى.

٣٠ أ ب جـ ى متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م، أ جـ = ١٦سم، ب ى = ٢٠سم، ق(∠ أ م ب) = ٥٤°، أوجد طول $\overline{\text{أ ى}}$ لأقرب سنتيمتر.

٣١ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = أ ى = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ى = ٨ سم، أ جـ = ١١سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ى شكل رباعى دائرى.

٣٢ البرهنة النظرية: فى أ ب جـ أثبت أن $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$، ثم أثبت أن مساحة سطح المثلث يتعين بالقانون:

م(△ أ ب جـ) = $\frac{\text{أَ}^{٢}\text{ جا ب جا جـ}}{\text{٢ جا أ}}$، واحسب مساحة سطح المثلث أ ب جـ إذا علمت أن:

أَ = ٢$\sqrt{٣}$ سم، ق(∠ ب) = ٣٠°، ق(∠ جـ) = ١٣٥°

٣٣ البرهنة النظرية (للمتفوقين): في المثلث أ ب جـ أثبت أن $\frac{١}{\text{حـ جا أ}} + \frac{١}{\text{أَ جا ب}} + \frac{١}{\text{بَ جا حـ}} = \frac{\text{ح}}{\triangle}$، حيث ح نصف محيط المثلث أ ب جـ، △ مساحة سطحه.

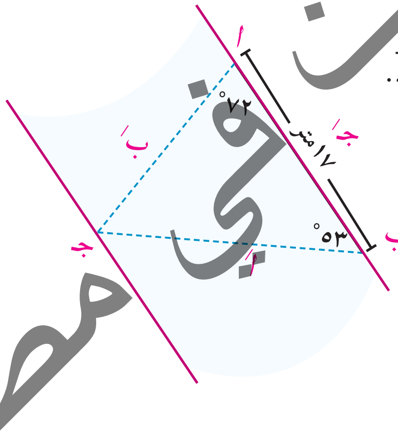
٣٤ أ ب جـ ى هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦سم، أوجد طول قطره $\overline{\text{أ جـ}}$.

تطبيقات حياتية:

٣٥ العلامتان أ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه والمسافة بينهما ١٧ مترًا، تقع العلامة جـ على الحافة المقابلة بحيث ق(∠ ب أ جـ) = ٧٢°، ق(∠ أ ب جـ) = ٥٣° أوجد:

أ المسافة بين العلامتين أ، جـ لأقرب متر.

ب المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.



٣٦ معارض الفنون: علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠سم، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر.

اختبار تراكمى

أسئلة الاختيار من متعدد

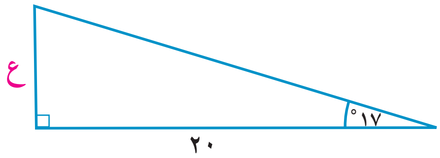
① بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة جتا ١٢٠° :

أ $\frac{١}{٢}$ ب $-\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

② أى من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبان؟

أ ٥٢° ب ١٥٠° ج ٢٠٠° د ٣١٥°

③ ما قيمة ع في هذا المنحدر؟ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة:



أ ٥,٨ ب ٦,١

ج ١٢,٣ د ١٩,١

④ ما قيمة أَ لأقرب جزء من عشرة في △ أ ب جـ الذي فيه بَ = ٦سم ، جـَ = ٧سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° :

أ ٣,٤ سم ب ٣,٥سم ج ٣,٦ سم د ٦,٦ سم

⑤ إذا كان ضلع النهاية لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة ($\frac{١}{٢}$، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

فإن ظا θ تساوي:

أ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ب $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ج $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ د $\sqrt{٣}$

⑥ المتطابقة المثلثية التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تعطى على الصورة:

أ ظا^٢ هـ -١ = قا^٢ هـ ب قا^٢ هـ -١ = ظا^٢ هـ ج ظا^٢ هـ - قا^٢ هـ =١ د ظا^٢ هـ +١ = قا^٢ هـ

⑦ نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ، الذى فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم يكون طوله:

أ ٢سم ب $\sqrt{٣}$ سم ج ٢$\sqrt{٣}$ سم د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

◯ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{مَ^٢ + نَ^٢ - لَ^٢}{٢ مَ نَ}$ مساويًا:

أ جتا م ب جا ن ج جتا ل د جا م

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

⑧ أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتى:

أ جا ٢٢٥° ب قا ١٥٠° ج ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ د جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

◯ أوجد زاوية بقياس موجب ، وأخرى بقياس سالب مشتركتين مع ضلع النهاية مع كل زاوية من الزوايا الآتية:

أ ١٣٥° ب ٣١٥° ج -٤٥° د $\frac{٢\pi}{٣}$

⑨ حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

أ ٣٠٠° ب -١٣٥° ج $\frac{٨\pi}{٥}$ د $\frac{٧\pi}{٤}$

◯ أوجد طول القوس المقابل للزاوية ٢١٠° في دائرة طول نصف قطرها ٦سم.

[إرشاد:طول القوس (ل) = هـ^{ء} × نق]

○ إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < π ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة جا أ جتا ب + جتا أ جا ب.

إرشادات للاختبار: السؤال (١٣) أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ب ، واضعًا فى الاعتبار الربع الذى تقع فيه كل زاوية ثم عوض فى المقدار المعطى.

(١٠) في المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠° ، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد صَ مقربًا لرقم عشرى واحد.

○ أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٤سم، بَ = ٥سم ، جـَ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ، ثم أوجد مساحته.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(١١) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ.

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٣سم ، بَ = ١٤سم ، جـَ = ١٥سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

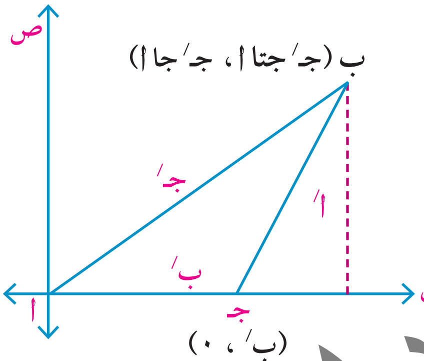
(١٣) حل المثلث ل م ن الذى فيه مَ = ١٧سم ، ق(∠ل) = ١٦° ٣٣° ، ق(∠ن) = ١٩° ٤٤°

○ حدد إذا كان للمثلث أ ب جـ في كل مما يأتى حل واحد ، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد عدد الحلول ، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أ أَ = ٢٠سم، بَ = ٢٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°

ب أَ = ٥ سم، بَ = ٧ سم، ق(∠أ) = ٦٠°

جـ أَ = ١٥سم، بَ = ١٠سم، ق(∠أ) = ١٢٠°



(١٤) مستعينًا بالشكل المقابل أثبت أن:

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} - ٢ بَ جـَ جتا أ

(**إرشاد:** استخدام قانون البعد بين نقطتين لإيجاد (ب جـ)^٢

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ارجع إلى	مهارات سابقة	مهارات سابقة	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	مهارات سابقة	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	الدرس ٤-١
	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
	مهارات سابقة	مهارات سابقة	أول ثانوى	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢	الدرس ٤-١	الدرس ٤-١ ، ٤-٢	الدرس ٤-١	الدرس ٤-١	الدرس ٤-٢ مهارات سابقة

اختبارات عامة

الاختبار الأول — الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

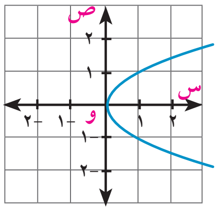
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س} =$

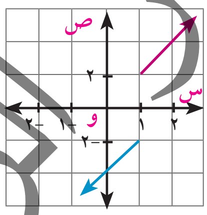
أ ١٠   ب ٦   ج ٥   د ٤

② الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو:

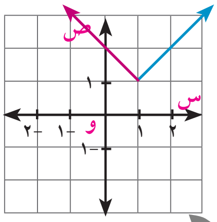
أ



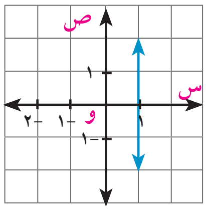
ب



ج



د



③ إذا كان منحنى $ص = لو_{٤} (١ - أ س)$ يمر بالنقطة $(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢})$ فإن أ =

أ ٢   ب ٣   ج ٤   د ٨

④ الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى:

أ $د_{١}(س) = س + ٢$ ب $د_{٢}(س) = س^{٢}$ ج $د_{٣}(س) = |س|$ د $د_{٤}(س) = ٥$

السؤال الثانى:

① عين مجال كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ ب $ر(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

② إذا كانت د دالة حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

السؤال الثالث:

① إذا كان $د_{١} : ع \longrightarrow ع$ حيث $د_{١}(س) = ٣س - ١$، $د_{٢} : [-٢، ٣] \longrightarrow ع$ حيث $د_{٢}(س) = ٣ - ٢س$ فارسم الدالة $(د_{١} + د_{٢})(س)$ محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

② أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

السؤال الرابع:

① أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٤}$ س = ١ - لو$_{٤}$ (س - ٣)   ب |س + ٢| = |س - ٣|

② **استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٢} فى رسم كلٍّ من:**

أ د$_{١}$(س) = س^{٢} - ٣   ب د$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٣

الاختبار الثانى   الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① إذا كانت ٣$^{س-٢}$ = ٢$^{س-٢}$ فإن س =

أ ٣   ب -٢   ج صفر   د ٢

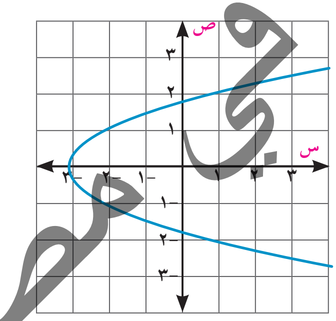
② إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≤ . فإن الدالة العكسية لها ص =

أ ص = $\frac{١}{٣}$س^{٣} ب ص = س^{٣} ج ص = س^{٣} - ١   د ص = س$^{-\frac{١}{٣}}$

③ إذا كانت (د) دالة فردية على [-س ، س] فإن د(-س) + د(س) =

أ ٢س   ب غير معرفة   ج -٢س   د صفر

④ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته



أ س = صفر   ب ص = صفر

ج ص = -٢   د س = ٢

السؤال الثانى:

① إذا كان د(س) = أ^{س} فإثبت أن المقدار $\frac{١}{د(س) + ١}$ + $\frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.

② أوجد مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{س-١}$ س

السؤال الثالث:

① استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل كل مما يأتي:

أ $د_١(س) = |س| + ١$ ب $د_٢(س) = ٢ - |س|$

② ارسم منحنى **كلٍّ** من الدوال الآتية و حدد مداها ثم ابحث اطرادها:

أ $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٤ س +٤}$ ب $د(س) = |س^٢ - ٤س + ٥|$ حيث $س \in [٠، ٤]$

السؤال الرابع:

① ابحث نوع كلٍ من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ $د_١(س) = س جتا س$

ب $د_٢(س) = \begin{cases} س^٢ & س \geqslant ٠ \\ |س| & س < ٠ \end{cases}$

ج $د_٣(س) = س^٢|س| - ١$

② أوجد مجموعة الحل لكل ممايأتى:

أ $|س| + س = ٠$

ب $|٢ س - ٣| - |٦ - ٤ س| > ٠$

الاختبار الثالث

الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة:

أ $(٢، ٠)$ ب $(-٢، ٠)$ ج $(٠، ٠)$ د $(٢، -٢)$

② الدالة الأسية د حيث $د(س) = أ^س$ ، $(أ > ١)$ تكون $د(س) > ١$ عندما:

أ $س \in ع$ ب $س \in ع^+$ ج $س \in ع^-$ د $س \in ص$

③ المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين $د(س) = |س+٣| - ٢$ ، $ر(س) = صفر$ هو

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٥

④ إذا كان لو$_{س}$ ٤ = ٢ فإن س تساوى:

أ ٤ ب ±٢ ج ٢ د -٢

السؤال الثانى:

① اختصر لأبسط صورة: لو$_{س ص}$ س + لو$_{س ص}$ ص.

② إذا كانت د(س) = ٢^{س} أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤.

السؤال الثالث:

① اكتب الدالة التى يمثلها المستقيم الذى ميله يساوى -١ ومقطعة الصادى يساوى ٣ ....

② ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = (س - ٢)|س| ومن الرسم أوجد مدى الدالة، ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع:

① استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} لتمثيل كل من:

أ د$_{١}$(س) = (س + ١)^{٣} ب د$_{٢}$(س) = س^{٣} + ١

② أوجد مجموعة حل المعادلة |٢س - ٣| = ١١

الاختبار الرابع الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① مجال الدالة د(س) = لو$_{١ - س}$ س هو:

أ س > ٠ ب س < ١ ج ٠ < س < ١ د ٠ ≤ س ≤ ١

② إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فإن إحداثى نقطة التماثل للدالة د(س + ١) هى:

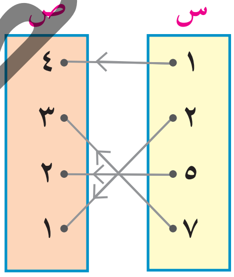
أ (١، ٠) ب (٠، ١)

ج (-١، ٠) د (-١، ١)

③ الشكل المقابل يمثل دالة د: س ← ص فإن د$^{-١}$(٤) =

أ ١ ب ٢

ج ٥ د ٧



④ منحنى الدالةر (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه....

أ $\overleftarrow{\text{و س}}$ ب $\overleftarrow{\text{و س}'}$ ج $\overleftarrow{\text{و ص}}$ د $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

السؤال الثانى:

① ارسم منحنى الدالة د: ع $\longrightarrow$ ع$^{+}$ حيث د(س) = ٢^{س} متخذًا س = [-٣، ٤] ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من د(-١,٥) ، $\sqrt[٤]{٢}$

② بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة لو ٢٥ + $\dfrac{\text{لو } ٨ \times \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$

السؤال الثالث:

① إذا كان د(س) = س^{٢} - ١ ، ر(س) = س + ١ فارسم الدالة $\dfrac{\text{د}}{\text{ر}}$ (س) مبينًا مجال ومدى الدالةثم ابحث اطرادها.

② أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية: |س + ٣| + ٢س = ٠

السؤال الرابع:

① أوجد مجموعة الحل لكل من:

أ |٣س + ٢| + ٥ = ٩ ب $\dfrac{١}{|٢س - ٣|}$ > ٢

② مثل بيانيًّا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ يمر بالنقط (٠، -٢) ، (٢، ٢) ، (٣، ٧) و يمثل دالة زوجية

ب يمر بالنقط (٠، ٠) ، (-٢، ١) ، (-٣، ٥) و يمثل دالة فردية.

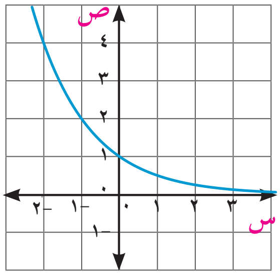
الاختبار الخامس الجبر

أجب عن الأسئلة الآتية:

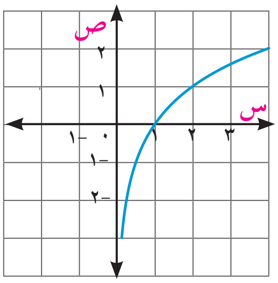
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① الدالة د حيث د(س) = ٢$^{-س}$ يمثلها الشكل البيانى:

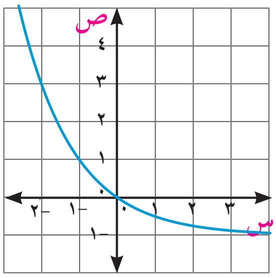
أ



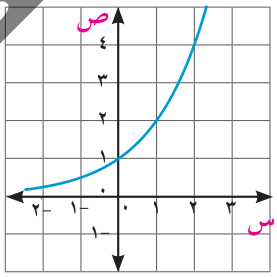
ب



ج



د



② المقدار $\frac{\text{٣ لو ٢}}{\text{لو ٤ + لو ٣}}$ يكافى المقدار:

أ لو$_{٣}$ ٢ ب لو$_{٧}$ ٢ ج لو$_{١٢}$ ٨ د لو$_{٧}$ ٨

③ إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{٤ -س}^{٢}}$ فإن مجال د(س) =

أ [-٢ ، ٢] ب]-٢ ، ٢[ج]-٢،٢[د]-٢، ٢]

④ إذا كانت الدالة د : دالة زوجية فى [أ، ب] فإن ب تساوى:

أ أ ب - أ ج ٢أ د أ^{٣}

السؤال الثانى:

① إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٤، ٢) فإوجد قيمة أ
ثم ارسم منحنى الدالة د فى [-٣،٣].

② أوجد مجموعة حل المعادلة : س$^{\frac{٤}{٣}}$ - ١٠س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٩ = صفر

السؤال الثالث:

① أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س - ٢| ⩽ ٧

② استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س لتمثيل ما يأتى بيانيًّا:

أ د$_{١}$(س) = ٤ + س ب د$_{٢}$(س) = س - ١

السؤال الرابع:

① أثبت أن الدالة د(س) = $\frac{\text{١ - |س|}}{\text{|س|}}$ زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًّا أو جبريًّا مجموعة حل المعادلة
د(س) = صفر وتحقق من صحة الناتج.

② حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر (س) حيث د(س) = (أ + ب) س^{٣} -٢ ،
ر(س) = س^{٣} + (أ + جـ) س + ب ثم ارسم الدالة د(س) وابحث اطرادها.

الاختبار السادس — تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٥}{\text{س}(٢\text{س}^{٢} + ٣)} =$

أ $\frac{٥}{٨}$ ب ١ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٥}{٣}$

② فى △أ ب جـ إذا كان ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن ق(∠جـ) ≃

أ ٨٩° ب ٢٩° ج ٥٧° د ٨٢°

③ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} & \text{س} \neq ١ \\ ٢\text{أ} & \text{س} = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فإن أ تساوى:

أ صفر ب -٢ ج ٢ د ١

④ فى △س ص ع المقدار $\dfrac{\text{سَ}^{٢} + \text{صَ}^{٢} - \text{عَ}^{٢}}{٢\text{سَ صَ}}$ يساوى:

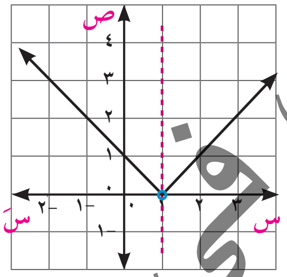
أ جتا س ب جتا ص ج جتا ع د جا ع

السؤال الثانى:

① أوجد أ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}$ ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا} ٢\text{س} + ٥ \text{جا} ٣\text{س}}{\text{س}}$

② حل المثلث △أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه أَ = ٢١سم ، بَ = ٢٥سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسة ٢٨سم.

السؤال الثالث:



① من الرسم البياني المقابل أوجد:

أ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$ ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ ج د(١) =

② أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠ء ب جـ) = ٧٠° ،
ب ء = ٨سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

السؤال الرابع:

① أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥سم، بَ = ٧سم ، ق(∠أ) = ٤٠° أوجد ق(∠ب).

② أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & ، \quad \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} - ٢\text{أ} & ، \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$$

الاختبار السابع

تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} =$

أ ٣ ب $\frac{١}{٩}$ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٦}$

② فى △أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) =

أ $\frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جـَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ بَ}}$ ب $\frac{\text{أَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ بَ}}$ ج $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ جـَ}}$ د $\frac{\text{جـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ بَ}}$

③ أ ب جـ مثلث فيه $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{{}^{٢}\text{جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا جـ}}{٤}$ فإن أَ : بَ : جـَ =

أ ٦ : ٥ : ٨ ب ٨ : ٥ : ٦ ج ٧ : ٢ : ٤ د ٣ : ٥ : ٦

④ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}}{٢\text{س} + ١} =$

أ ١ ب $\frac{٣}{٢}$ ج $\frac{١}{٢}$ د ٣

السؤال الثانى:

① إذا كانت الدالة د حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} & \text{س} \neq -٣ \\ \text{س} + \text{أ} & \text{س} = -٣ \end{cases}$ متصلة عند س = -٣ فأوجد قيمة أ.

② أ ب جـ مثلث فيه $\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا جـ أوجد ق(∠جـ) و إذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

السؤال الثالث:

① أوجد: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{جا } ٣\text{س}}{٥\text{س جتا } ٢\text{س}}$

② حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٩سم ، بَ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ١٠٦°

السؤال الرابع:

① أوجد $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$

② أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧سم، ب جـ = ١٢سم، جـ ى = ٨سم، ى أ = ١٢سم، أ جـ = ١٨سم. أثبت أن $\overline{\text{أ جـ}}$ ينصف ∠ب أ ى ثم أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ى.

الاختبار الثامن — تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{٢س + جا ٣س}}{\text{ظا ٥س}} =$

أ ٥ ب $\frac{٦}{٥}$ ج ١ د صفر

② فى ا ب جـ إذا كان اَ = ٦، ق(∠ب) = ٢ ق(∠ا) = ٨٠° فإن جـَ =

أ $\frac{\text{٦ جا ٤٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ ب $\frac{\text{جا ٦٠°}}{\text{٦جا ٤٠°}}$ ج $\frac{\text{جا ٤٠°}}{\text{٦ جا ٦٠°}}$ د $\frac{\text{٦ جا ٦٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$

③ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{-٣} + ٢\text{س}^{-٢} + ١}{\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-١} + ٣} =$

أ ٢ ب (١) ج ٣ د $\frac{١}{٣}$

④ فى المثلث س ص ع إذا كان: $\frac{\text{جا س}}{٣} = \frac{\text{جا ص}}{٤} = \frac{\text{جا ع}}{٥}$ فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث:

أ ٦٠° ب ٧٥° ج ٩٠° د ١٢٠°

السؤال الثانى:

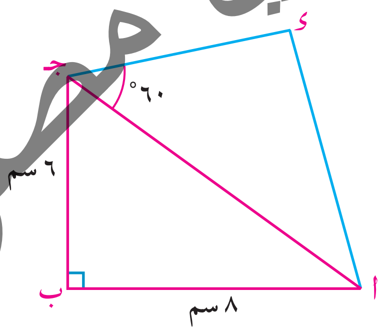
① إبحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ د(س) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣} & \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} - ٧ & \text{س} < ٣ \end{cases}$

② ا ب جـ مثلث فيه ق(∠ا): ق(∠ب): ق(∠جـ) = ٣: ٤: ٣ فإذا كان اَ = ٥سم فأوجد محيط المثلث.

السؤال الثالث:

① أوجد: أ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س}^٢ - ٩}$ ب $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + \text{جا}^٢ ٣\text{س}}{\text{س}^٢}$

② فى الشكل المقابل: ا ب جـ ء شكل رباعى فيه ا ب = ٨سم، ب جـ = ٦سم، ق(∠ب) = ٩٠°، ءجـ = ٥ سم، ق(∠ا جـ ء) = ٦٠°. أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس ا ء جـ



السؤال الرابع:

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}{\text{س} + ٢} & \text{س} > -٢ \\ ٣\text{س} + ٥ & \text{س} \leqslant -٢ \end{cases}$

② حل المثلث ا ب جـ الذى فيه اَ = ٥سم ، بَ = ٢جـَ = ٨سم.

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الاختبار التاسع　　تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٧ - ١}{\text{س} - ١} =$

أ ٧　　ب ٨　　ج ٦　　د صفر

② في أ ب جـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{.........}}$

أ $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$　　ب $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا جـ}}$　　ج $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}}$　　د $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ} + \text{جا جـ}}$

③ إذا د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا أ س}}{\text{س}} & \text{عندما س} \neq \text{صفر} \\ ٣ & \text{عندما س = صفر} \end{cases}$ متصلة عند س = صفر فإن أ =

أ ١　　ب ٢　　ج ٣　　د ٤

④ في المثلث س ص ع إذا كان سَ = صَ فإن جتا س =

أ $\frac{\text{صَ}^٢}{\text{عَ}}$　　ب $\frac{\text{عَ}^٢}{٢\text{صَ}}$　　ج $\frac{\text{عَ}}{٢\text{سَ}}$　　د $\frac{\text{صَ}}{٢\text{سَ}}$

السؤال الثاني:

① أ أوجد قيمة: $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{س}}$　　ب $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^٢}$

② أ ب جـ مثلث فيه ق($\angle$أ) = ٣٥، أَ = ٨سم، بَ = ٦سم أوجد ق($\angle$ب).

السؤال الثالث:

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٣ & \text{س} \geqslant ١ \\ \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} & \text{س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

② شكل خماسي منتظم محيطه ٣٠سم. أوجد مساحة سطحه.

السؤال الرابع:

① أ ب جـ ء متوازي الأضلاع محيطه ٢٠سم فإذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متجاورين ٢ : ٣
فإذا كان ب ء = ٨سم فأوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

② إذا كان $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د(س) = ٢ حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \text{أ جتا ٢س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ فأوجد قيمة أ

الاختبار العاشر تفاضل وحساب مثلثات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\underset{س \to أ}{\text{نهــا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} =$

أ $\frac{م}{ن}$ ب $\frac{م}{ن} (أ)^{م-ن}$ ج $\frac{ن}{م} (أ)^{م-ن}$ د $\frac{ن}{م} (أ)^{ن-م}$

② في أي مثلث أ ب جـ يكون: $\frac{جا (أ + ب)}{جا أ + جا ب} =$

أ ١ ب $\frac{جـَ}{أَ + بَ}$ ج $\frac{أَ}{بَ + جـَ}$ د $\frac{بَ}{أَ + جـَ}$

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٥ + س^{-٢}}{٣س^{-٢} + ١} =$

أ $\frac{٥}{٤}$ ب $\frac{٥}{٣}$ ج ٥ د $\frac{١}{٣}$

④ قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦سم، ١٠سم، ١٤سم تساوى

أ ١٢٠° ب ١٥٠° ج ١٣٥° د ٦٠°

السؤال الثانى:

① ابحث وجود نهاية للدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا ٢س}{جا س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عندما س ⟵ ٠

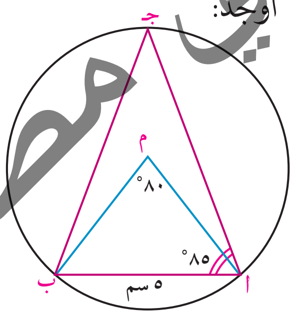
② حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ٥سم، بَ = ٧سم، ق(∠جـ) = ٦٥°.

السؤال الثالث:

① أوجد قيمة م التي تجعل الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٣} - ٨} & \text{عندما } س \neq ٢ \\ \frac{-٢}{|م|} & \text{عندما } س = ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

② في الشكل المقابل: م دائرة، أ ب = ٥سم، ق(∠أ م ب) = ٨٠°، ق(∠جـ أ ب) = ٨٥° أوجد:

أ **أولًا:** محيط △أ ب جـ ب **ثانيًا:** مساحة سطح الدائرة م



السؤال الرابع:

① أوجد $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$

② بين إن كان للمثلث أ ب جـ في كل مما يأتي حل وحيد ، أم حلان ، أم ليس له حل ، مقربًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

أ ق(∠أ) = ١٠٥°، أَ = ٨سم، بَ = ٥سم ب ق(∠أ) = ٤٧°، أَ = ٤سم، بَ = ٦سم

إجابات بعض التمارين

الوحدة الأولى: الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

اجابة بعض تمارين (١-١)

(١) العلاقة التى تمثل دالة هى (د)

(٥) مدى الدالة =]١، ٣[∪ {-١}

(٦) ع - [٣، ٥[

(٧) [-٣، ٣[(٨) المدى =]١، ١٠[

(١٠) أ ع(١٠) = ٨٠ سم/ث

ب ع(١٥٠) = ٨٠ سم/ث

ج ع(٢١٠) = -٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠سم/ث

(١١) أ د(٥٠٠٠) = ١٢٥٠٠

ب د(١٠٠٠٠) = ٢٢٥٠٠

(١٢) د(ل) = $ل^{٢}$

أ ح(٣) = ٩ ب ح$(\frac{١٥}{٤}) = \frac{٢٢٥}{١٦}$

اجابة بعض تمارين (١-٢)

(١) المنحنى متماثل حول محور س: (١) (٢)

المنحنى متماثل حول محور ص: (١)

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل: (١)، (٣).

(٣) داول زوجية: (أ) ، (ز)

دوال فردية: (ب) ، (جـ) ، (و)

دوال غير ذلك: (د) ، (هـ) ، (ح)

(٤) أ، د فردية ، ج زوجية ، ب غير ذلك

(٥) أ ، ج زوجية ، ب فردية ، د غير ذلك

(٧) شكل (١): المدى = [٢ ، ∞[، ليست د إحادية

شكل (٢): المدى = [-٢، ٢] - {٠} ،

ليست د إحادية

شكل (٣): المدى = [-٣، ٦] ، ليست د إحادية

شكل (٤): المدى = ع - {٠} ، دالة إحادية

(٨) أ ، ب ، جـ دوال إحادية ، د ، هـ

ليست دوال إحادية

اجابة بعض تمارين (١-٣)

(١) **شكل (١):** المدى = ع - [-٢، ٢]

الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[،]٠، ∞[

شكل (٢): المدى =]٠، ∞[

الدالة تزايدية فى]-٢، ٠[،]٢، ∞[

الدالة تناقصية فى]٠، ∞[

شكل (٤): المدى = ع -]٠، ٣[

الدالة تزايدية فى]-∞، ٠[،]٠، ∞[

(٣) أ المدى = [١، ٦] ، الدالة تناقصية

فى]-٢، ١[،

الدالة تزايدية فى]١ ، ٦[

اجابة بعض تمارين (١-٤)

(١) أ جـ = -٤

(٣) جـ (٤) ب (٥) أ (٦) جـ

(١٠) أ د(س) = $\frac{١}{س} + ٢$ ب د(س) = $\frac{١}{س} - ٣$

هـ د(س) = $\frac{١}{س+٢} - ٢$

و د(س) = $\frac{١}{س-٢} + ٣$

إجابة بعض تمارين (١-٥)

(١) {-١، ٥} (٢) {-٢، ٥} (٣) {٦}

(٤) {٠} (٥) {١} (٦) $\{\frac{٣}{٢}\}$

(١٠) {-٤ ، ١٠} (١٤) {١ ، ٥}

(١٣)]-∞ ، ٠] (١٥) $\{\frac{١}{٢}\}$

(١٦)]-١ ، ٣[(١٧)]-١، ٥[

الوحدة الثانية: الاسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

اجابة بعض تمارين (٢-١)

(٣) أ ٤ ب $\frac{١٢٥}{٨}$ ج $\frac{١٢٥}{٨}$

د $\frac{٢}{٣}$ هـ ٤

(٤) أ ٤ ب $\frac{١}{٢}$ ج ١٦

د $(\sqrt[٥]{س})^{٤}$ هـ ٢

و {٠، ٤} ز ٢٥

(٧) أ $\frac{١}{٤}$ ج ٩

د {٠، $\pm\sqrt[٤]{٥}$ }

هـ {١، ٣٢} و {٩، ٢٥} ز {٢٧}

اجابة بعض تمارين (٢-٢)

(٣) ب س، ٥ هـ س -١، $\frac{٢}{٣}$

(٤) أ ع ،]٠، ∞[، تزايدية

ب ع ،]٠، ∞[، تناقصية

ج ع ،]-∞ ، -٣[تزايدية د ع ،]٣، ∞[

تزايدية

(٥) ٢١٧١٢٦ جنيه

(٦) ص = ٥٤٠٠٠$(٠,١)^{ن}$ ٥٤

(٧) ١٥٥ (٩) ٣٦٤٠٠ $(١,٠٤)^{ن}$ ، ٥٣٨٨١

اجابة بعض تمارين (٢-٣)

(١) أ ب ب ١ ج جـ

(٢) أ {١} ب {-١} ج {٢}

و {٢} ح {٢، ٣} ط {-٧}

(٣) أ ٦ ب صفر

(٤) ٢ (٥) ١

(٨) أ ٢٠٤٦ ب ١٦

اجابة بعض تمارين (٢-٤)

(٣) ز $د^{-١}(س) = ٣ - (س - ٢)^{٢}$ **حيث** س ⩾ ٢

ى ∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{س + ٩} - ٤$ **حيث** س ⩾ -٩

اجابة بعض تمارين (٢-٥)

(١) أ $لو_{٣} \frac{١}{٩} = -٢$ ب $لو_{\frac{٢}{٥}} \frac{١٦}{٦٢٥} = ٤$

ج $لو_{٥} ١$ = صفر د $لو_{\sqrt{٢}} ٤ = ٤$

(٢) أ $١٠٠ = ١٠^{٢}$ ب $٤\sqrt{٢} = (٢)^{\frac{٥}{٢}}$

ج ١ = ٧ صفر د $١٢١ = (\sqrt{١١})^{٤}$

(٨) أ (٩) ب (١٠) ب

(١١) ب (١٢) أ (١٣) ب

(١٤) د

(١٥) أ ٤ ب ٣ ج ٦

د ٤ هـ -٣

(١٦) أ ٢٧ ب ٣ ج ٣

د ٩ هـ ٣ و -٣، ٢

اجابة بعض تمارين (٢-٦)

(٢) أ ١ ب ١ ج ٢

د ١ هـ ٠ و ٠

(٣) أ ✗ ب ✗ ج ✓

د ✗ هـ ✓ و ✓

(٧) أ ٠,٤٩٨٣ ب ٢

ج ١,١٣٧٤ د ١,٢٢٣٧

(٨) ٢٧ رقم (٩) أ ٣ ب $١٠^{-٩}$

(١١) لو١٠ = ١

اجابة بعض التمارين عامة

(١) أ ب ب د ج أ د أ

هـ ب و ب ز ب ط أ

(٢) أ (-١) ب (٤) ج (٢)

د (٨، -٨) هـ (١٠، ١، ٠,١)

و (١٦) ز $(\frac{١}{٢})$

ط $(\frac{-١٧}{٨})$

(٣) أ ٢٥ ب ع، $ع^{+}$

ج $ع^{+}$، ع د ١

هـ (٢، ٠) و ٦٤

اجابة اختبار تراكمي

(٢) أ ١٠ ب $(\frac{١١}{١٥})$ ج ٢

(٣) أ (٣٢، ٣)

ب $(\frac{٢٥}{٣})$ ج (١)

(٤) أ ٧ ب ٨٩ ج صفر

(٥) $(س - ص)^{٢}$ = صفرًا ← س = ص

(٦) أ ١٧,١٥

مكتبة مستشار الرياضيات في مصر

الوحدة الثالثة: النهايات والاتصال

اجابة بعض تمارين (٣-١)

(١) أ $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٢   ب $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٣

ج $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) =١

(٢) أ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) =١   ب د(٠) =١

(٩) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}$ (٥س +٤) = ١٤

(١٠) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}$ (٣س +١) = -٢

(١١) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١} = -٢$

(١٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤} = \frac{١}{٤}$

(١٣) أ ٢   ب -٣   ج ٣

د صفر   هـ صفر   و صفر

اجابة بعض تمارين (٣-٢)

(١) ٥   (٢) -١   (٣) -١

(٤) ٤   (٥) ٥أ^{٤} (٦) $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٨}$

(٧) $\frac{-٣}{٤}$ (٨) $\frac{٤}{٣}$ (٩) ٣

(١٦) ٢   (١٧) -١   (١٨) π

(٢٢) $\frac{-٤}{٥}$ (٢٣) $\frac{-٤}{٥}$ (٢٤) $\frac{٧}{٦}$

اجابة بعض تمارين (٣-٣)

(١) ١   (٢) -٢   (٣) -٧

(٤) ∞   (٥) ٢   (٦) ∞

(٧) ∞   (٨) ٣   (٩) ٣

(١٠) ٠   (١١) ٣   (١٢) ١

(٢٥) ٢   (٢٦) ٩   (٢٧) -٥

(٢٨) $\frac{٧}{٢}$ (٢٩) -١   (٣٠) $\frac{١}{٨}$

(٣١) $\frac{-١}{٢}$ (٣٢) $\frac{٣}{١٠}$ (٣٣) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٤) $\frac{١}{٨}$ (٣٥) -٣   (٣٦) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٧) أ = ٤، ب = ٤   (٣٩) ٢

اجابة بعض تمارين (٣-٤)

(١) ١   (٢) ٠   (٣) ٠   (٤) ٧

(٥) $\frac{٣}{٤}$ (٦) $\frac{١}{٣}$ (٨) ١   (٢٩) ١

(٣٠) ٠   (٣١) ٠   (٣٢) -١   (٣٣) $\frac{٢}{٣}$

(٣٤) -٣   (٣٥) ١   (٣٦) ٢٨   (٣٧) ٦٥

(٣٩) $\frac{٥}{٢}$ (٤٠) -١   (٤١) ١٧   (٤٢) $\frac{١}{٥}$

(٤٣) $\frac{-٩}{٨}$ (٤٤) ٠   (٤٩) ١

اجابة بعض تمارين (٣-٥)

(١) أ ١   ب ١

(٢) أ ∞   ب ∞

(٣) أ -٢   ب -٣   ج $\frac{-٣}{٢}$

د ليس لها وجود   هـ ليس لها وجود

(٤) أ ٢   ب ٢

(٥) أ ٣   ب ٠

(٦) أ ٠   ب -∞

(٧) ٤   (٨) -١٠   (٩) ليس لها وجود

(١٠) -١   (١١) ٢   (١٢) ليس لها وجود

اجابة بعض تمارين (٣-٦)

(١) متصلة عند س =١

(٢) متصلة عند س =٢

(٣) متصلة على عند س =٣

(٤) غير متصلة عند س = -٢ متصلة عند س =١

(٥) متصلة عند س =٢

(٦) متصلة عند س =٠

(٧) متصلة على ح

(٨) متصلة على ح

(٩) متصلة على ح - {٠، ٢}

(١٠) متصلة على ح- {٥، ٣}

(١١) متصلة على ح - {٢، -٢}

(١٢) متصلة على ح- {-٢}

(١٨) متصلة على ح - {٣، -٣، $\frac{\pi}{٢}$ + نπ }

حيث ن ∈ص

(١٩) متصلة على [- $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

(٢٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ١ - جتا\, س}{٥س} & ، س > ٠ \\ \frac{٣}{٥} & ، س = صفر \\ \frac{٣}{٥}\, جتا\, س & ، س < صفر \end{cases}$

(٢٧) $د(س) = \begin{cases} \frac{(س - ٣٠)^{٥٠} + (س - ٣)}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ١ & س = ٣ \\ جتا\,(٣ - س) & س < ٣ \end{cases}$

اجابة بعض التمارين عامة

(٤) $٦\frac{٢}{٣}$ (٥) $\frac{٥}{٧}$ (٦) ١   (٧) $\frac{١}{٣}$

(٨) ليس لها وجود   (٩) $\frac{١}{٥}$ (١٠) $\frac{٩}{٢}$

(١١) $\frac{٥}{٣}$ (١٢) ١٦   (١٣) $\frac{١}{٢}$ (١٤) $\frac{١}{٥}$

(١٥) -٣   (١٦) $\frac{٢}{٣}$ (١٧) $\frac{٢٥}{٢}$

(١٨) أ ٢   ب ٢   ج ٢

(١٩) ٣   (٢٠) ٠   (٢١) ∞

(٢٢) $\frac{٥}{٧}$ (٢٣) $\frac{-٥}{٦}$ (٢٤) $\frac{٥}{٢}$

(٢٥) ٢   (٢٦) ٠   (٢٧) $\frac{٣}{٥}$

(٣٧) $\frac{١}{٨}$ (٣٨) لايمكن   (٣٩) -٢

(٤٠) متصلة على الفترة [٠ ، ∞ [

(٤١) أ = $\frac{-١}{٢}$ ب = - $\frac{٩}{٢}$

اجابة اختبار تراكمى

(١) ٣، -٢   (٢) -٣س

(٣) س^{٢} - س +٤   (٦) ١

(٧) $\frac{-٣}{٢}$ (٨) $\frac{٢}{٥}$ (٩) $\frac{١}{٣}$

(١٠) $\frac{١}{٢}$ (١١) $\frac{٨}{٣}$ (١٢) $\frac{٩}{٥}$

(١٣) $\frac{١}{٣}$ (١٤) $\frac{٥}{٣}$

(٢٨) أ غير متصلة   ب غيرمتصلة

ج متصلة   د متصلة

هـ متصلة   و متصلة

(٢٩) أ ك = -٥   ب ك = $\frac{٤}{٣}$

ج ك = ١٦٢

(٣٠) ك = ٤، م = $\frac{٥}{٣}$

الوحدة الرابعة: حساب المثلثات

اجابة بعض تمارين (٤-١)

(٢) أَ : بَ : جَـ = ٦ : ٤ : ٣

(٣) ٢٠ سم   (٤) ١١,٣سم   (٥) ٤

(٦) أ   (٧) أ   (٨) أ

(٩) ى   (١٠) جـ   (١١) ى

(١٥) أ ب = ٢٠,٠٥°، جـ = ١٢٧,٩٥°،

جـ = ٢٥,٣سم

(١٩) أ جـ ≃ ١٤,٦١سم ، ب جـ = ١٦,٥٩سم

(٢٠) ب ى ≃ ١١١٨م، أ جـ ≃ ١٤٣٨ م

(٢٥) بَ ≃ ١٨ سم ، نق ≃ ١٦,٥٦سم

(٢٦) أَ ≃ ١٩٣,١١ كم ، بَ ≃ ٦٩,٤٤ كم

اجابة بعض تمارين (٤-٢)

(٤) ٧٤,٣٨°   (٥) ٣٥,٤١°   (٦) ٢$\sqrt{١٩}$ سم

(٨) ب   (٩) جـ

(١٠) أ   (١١) ب

(١٣) جـ ٧٤,٣٨°   د -١٢٠°

هـ ٢٨,٠٧°   و ٧٨,٤٦°

ز ١١,٤٩سم   ح ١٧,٧١سم

(١٨) ب د = ١٠ سم   (١٩) ١٠٥$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(٢٠) ٨٥ متر   (٢١) ٢٣٩ متر   (٢٢) ٢,٩ سم

اجابة بعض التمارين عامة

(١١) أَ ≈ ٩,١٥سم، بَ ≈ ١١,٤سم،

نق ≈ ٨,٣٣سم

(١٢) ٢٦,٤٨سم   (١٣) ٣٨ سم^{٢}

(١٤) ب جـ ≈ ٨,٢٨سم، محيط الدائرة ≈ ٢٦,٤سم

(١٥) ١٠,٩١سم، ١٤,٣٤سم، ١٤,٧٥سم

(٢٠) ٣٤َ ١٠٨°، ٢٠َ ٤٦°، ٦َ ٢٥°

(٢١) ق (∠أ) ≈ ١٦َ ٦١°، نق ≈ ٦,٨٤سم

(٢٢) ق (∠ب) ≈ ٢٩َ ٥٩°،

مساحة سطح المثلث ≈ ٨٤سم^{٢}

(٢٣) أ جـَ ≈ ١٢سم

(ب) مساحة سطح المثلث ≈ ٣١سم٢

(جـ) ع ≈ ٦سم

اجابة اختبار تراكمى

(١) ب (٢) ى (٣) ب

(٦) ى (٧) أ (٥) ى

(١١) (أ) $\frac{٥}{٣}\pi$ (ب) $\frac{٣}{٤}\pi$ (جـ) ٢٨٨° (د) ٣١٥°

(١٢) ٧ π

اختبارات عامة

أولا: اجوبة اختبارات الجبر

الاختبار الاول

السؤال الأول:

(١) د (٢) جـ (٣) أ (٤) أ

السؤال الثالث:

المجال = [-٢، ٣]

السؤال الرابع:

(١) (أ) مجموعة الحل = {٤}

(٢) مجموعة الحل = { $\frac{١}{٢}$ }

الاختبار الثاني

السؤال الأول:

(١) د (٤) ب

السؤال الثاني:

(١) اثبات. (٢) المجال =] ١، ∞[- {٢}

السؤال الثالث:

(٢) (أ) المدى =] ٠، ∞ [(ب) المدى =] ١، ٥]

الاختبار الثالث

السؤال الثاني:

(١) ١ (٢) ٤

السؤال الثالث:

(١) د(س) = -س + ٣

السؤال الرابع:

(٢) {٧، -٤}

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) جـ (٣) أ (٤) جـ

السؤال الثاني:

(١) ٠,٤ ، ٥٠,٥ (٢) ٢

السؤال الثالث:

(٢) {٣}

السؤال الرابع:

(١) (أ) { $\frac{٢}{٣}$، -٢} (ب) [$\frac{٥}{٤}$، $\frac{٧}{٤}$]

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(١) د (٢) جـ (٣) أ (٤) ب

السؤال الثانى:

(١) أ = ٢ (٢) {+ ٢٧، -٢٧ ، ١، -١}

السؤال الثالث:

(١) ع - [- $\frac{٥}{٣}$، ٣]

السؤال الرابع:

(٢) أ = ٣ ، ب = -٢ ، جـ = -٣

ثانياً: اجوبة اختبارات التفاضل والمثلثات

الاختبار السادس

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) ب (٣) د (٤) ب

السؤال الثانى:

(١) (أ) $\frac{٨٠}{٧}$ (ب) ١٧

(٢) أ = ٣٥ َ ٤٨ °، ب = ١٤ َ ، ٦٣°، جـ = ١١/ ٦٨°،

أ َ = ٢٦سم

السؤال الثالث:

(١) (أ) $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٠ (ب) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ١

(جـ) د(١) = ٠

السؤال الرابع:

(٢) أ = - $\frac{١}{٢}$

الاختبار السابع

السؤال الأول:

(١) ب (٢) د (٣) أ (٤) جـ

السؤال الثاني:

(١) أ = -١

(٢) ق (∠جـ) = ٩٠°، المساحة = ١٢سم٢

السؤال الثالث:

(١) $\frac{٣}{٥}$

(٢) حـ َ = ١٨سم، ب = ١٤ َ ٥٣°،

(أ) = ٤٦ َ ٢٠°

السؤال الرابع:

(١) $\frac{٥}{٤-}$ (٢) ١٢٤,٣ سم٢

الاختبار الثامن

السؤال الأول:

(١) جـ (٢) ب (٣) د (٤) جـ

السؤال الثانى:

(١) -١ ( ) المحيط ≃ ١٠,٩سم

السؤال الثالث:

(١) (أ) $\frac{٣}{٢}$ × ٣ = $\frac{٩}{٢}$ (ب) ١٠

(٢) ٢٥ π سم٢

السؤال الرابع:

(١) غير متصلة

(٢) ب = ٦ َ ١٢٥°، أ = ٤٥ َ ٣٠°،

جـ = ٤٨ َ ٢٤

الاختبار التاسع

السؤال الأول:

(١) أ (٢) جـ (٣) جـ (٤) ب

السؤال الثاني:

(١) (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(٢) ٣٠ َ ٤٣°

السؤال الثالث:

(١) متصلة (٢) ٤٣ سم٢

السؤال الرابع:

(١) ١٤,٨ سم (٢) ٢

الاختبار العاشر

السؤال الأول:

(٢) ب (٣) جـ (٤) أ

السؤال الثانى:

(٢) جـ َ = ٦,٧ سم ، أ = ٥٠ َ ٤٢ ، ب = ١٠ َ ٧٢

السؤال الثالث:

(١) م = ± ٢٤

(٢) ١٩,١٢سم، ١٥,١٢ π وحدة مربعة

السؤال الرابع:

(١) ٥ (٢) (أ) حل واحد ق(∠ب) = ٣٧/٨ ،

جـ = ٥٢ َ ٣٧°،

حـ َ ≃ ٥,١ سم